



**You have downloaded a document from  
RE-BUS  
repository of the University of Silesia in Katowice**

**Title:** Zastosowania teorii kategorii w topologii ogólnej

**Author:** Marta Walczyńska

**Citation style:** Walczyńska Marta. (2018). Zastosowania teorii kategorii w topologii ogólnej. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.



UNIwersYTET ŚLĄSKI  
W KATOWICACH



Biblioteka  
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki  
i Szkolnictwa Wyższego

UNIwersYTET ŚLĄSKI  
W KATOWICACH  
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I CHEMII

# ZASTOSOWANIA TEORII KATEGORII W TOPOLOGII OGÓLNEJ

MARTA WALCZYŃSKA

PRACA DOKTORSKA NAPISANA POD KIERUNKIEM:  
Promotor DR HAB. WIESŁAW KUBIŚ;  
Promotor pomocniczy DR WOJCIECH BIELAS.

KATOWICE 2018

## Podziękowania

Dziękuję Promotorowi dr. hab. Wiesławowi Kubisiowi za wszelką pomoc: opiekę merytoryczną, dostarczenie interesujących problemów badawczych, przekazaną wiedzę, zaangażowanie, cenne uwagi oraz liczne sugestie.

Dziękuję Promotorowi pomocniczemu dr. Wojciechowi Bielasowi za nieocenioną pomoc udzieloną w trakcie przygotowywania pracy doktorskiej, cierpliwość, wyrozumiałość oraz poświęcony czas.

Wyrażam głęboką wdzięczność Opiekunowi i Nauczycielowi prof. dr. hab. Szymonowi Plewikowi za owocną kilkuletnią współpracę, istotny wkład w charakter rozprawy, oddanie, okazane serce, poświęcony czas oraz liczne rozmowy będące inspiracją w kierunku nowych rozwiązań. Dziękuję za to, że zawsze mogłam na Niego liczyć.

Dziękuję również Rodzinie za nieustanne wsparcie oraz motywację.

Niniejszą pracę pragnę dedykować mojej najukochańszej Mamie w podziękowaniu za nigdy niegasnącą wiarę we mnie oraz mobilizację.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
1.1	Teoria kategorii jako sposób rozumowania . . . . .	8
1.2	Teoria mnogości, czyli o teorii zbiorów . . . . .	10
1.2.1	Drzewa i przestrzenie gałęzi. Operator $\partial$ . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Ogólnie o teorii kategorii</b>	<b>19</b>
2.1	Diagramy . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Analiza twierdzenia Knastera–Reichbacha</b>	<b>26</b>
3.1	Zbiór Cantora jako granica odwrotna . . . . .	26
3.2	Przedłużanie odwzorowań między podzbiorami zbioru Cantora . . . . .	30
3.3	Twierdzenie Knastera–Reichbacha dla przestrzeni metrycznych, rozproszonych oraz zwartych . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Kilka uwag o Cantorvalach</b>	<b>42</b>
4.1	Cantorval symetryczny . . . . .	42
4.2	O twierdzeniu J. von Neumanna . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Jak (czy) korzystać z teorii kategorii w rozważaniach topo- logicznych</b>	<b>50</b>
5.1	Transformacja naturalna . . . . .	50
5.2	Kategoria $\sigma\mathbf{C}$ . . . . .	51
5.3	Pullback oraz pushout . . . . .	53
<b>6</b>	<b>O ciągach Fraïsségo</b>	<b>57</b>
6.1	Kryterium istnienia ciągu Fraïsségo . . . . .	59
6.2	Ciągi Fraïsségo w kategorii $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Odwrotna (projektywna) teoria Fraïsségo</b>	<b>75</b>

7.1	Niektóre konsekwencje Corollary 3.8 z artykułu W. Kubisia [21]	75
<b>8</b>	<b>Jakie zagadnienia topologiczne mogą być badane na gruncie teorii kategorii?</b>	<b>77</b>
8.1	Kategoria $\mathfrak{C}$	78
8.2	Właściwe i semiwłaściwe amalgamacje	78
8.3	Kategoria porządków liniowych skończonych	79
8.4	Kilka uwag o kategorii $\mathbf{S}_{\leq}$	87
8.5	Porządki liniowe	87
8.6	Uniwersalna jednorodna miara probabilistyczna na zbiorze Cantora	90

# 1 Wprowadzenie

Tematem niniejszej rozprawy jest omówienie niektórych pojęć teorii kategorii w zastosowaniu do topologii ogólnej oraz zbadanie do jakiego stopnia rozumowania wykorzystujące te pojęcia mogą zastąpić metody tradycyjne.

Powiązanie topologii z teorią kategorii to jeden z celów matematyków śląskich, tj. matematyków którzy swoją karierę naukową zaczynali bądź przez jakiś czas uprawiali w Katowicach lub Wrocławiu. Z cytowanych w tej rozprawie autorów są to: W. Bielas [6], J. Kleszcz [18], B. Knaster [19], W. Kubiś [21], [22] oraz [23], A. Kwiatkowska [4], J. Mioduszewski [29] oraz [30], Sz. Plewik [35], [36] oraz [6], a także S. Solecki [16]. Gdy zaczęłam zagłębiać się w tematykę mojego doktoratu, to o teorii kategorii miałam ogłędne pojęcie, sprowadzające się do przekonania, że jest to komponent teorii grafów skierowanych. Mianowicie, wierzchołki to obiekty, zaś krawędzie są strzałkami. Z punktu widzenia teorii modeli sprowadza się to do struktury z wyróżnioną relacją dwuargumentową. Przykładowymi relacjami są zbiór krawędzi, relacja należenia lub rodzina strzałek itp.

W artykule [35], opisując aspekty algebraiczne operacji Kuratowskiego, przyjęliśmy zamyśl, że obiektem naszych badań jest składanie operacji, a więc funkcja dwuargumentowa, która jest relacją trójargumentową (relacją ternarną lub 3-arną). Mianowicie, jeśli  $X$  jest przestrzenią topologiczną, to niech  $A^-$  oznacza domknięcie zbioru  $A \subset X$ , natomiast  $A^c$  to dopełnienie  $A$ , czyli  $X \setminus A = A^c$ . Wtedy obowiązuje skrót  $A^{-c-} = A^{-c-c-}$ , który pozwala ustalić, że maksymalnie jest tylko 14 różnych operacji Kuratowskiego. Oznaczamy je następująco:

$$\begin{array}{ll} \sigma_0(A) = A \text{ (identyczność)}, & \sigma_1(A) = A^c \text{ (dopełnienie)}, \\ \sigma_2(A) = A^- \text{ (domknięcie)}, & \sigma_3(A) = A^{c-}, \\ \sigma_4(A) = A^{-c}, & \sigma_5(A) = A^{c-c} \text{ (wnętrze)}, \\ \sigma_6(A) = A^{-c-}, & \sigma_7(A) = A^{c-c-}, \\ \sigma_8(A) = A^{-c-c}, & \sigma_9(A) = A^{c-c-c}, \\ \sigma_{10}(A) = A^{-c-c-}, & \sigma_{11}(A) = A^{c-c-c-}, \\ \sigma_{12}(A) = A^{-c-c-c}, & \sigma_{13}(A) = A^{c-c-c-c}. \end{array}$$

W książce [9, str. 81] informacje o operacjach Kuratowskiego ograniczone są do uwag historycznych oraz wskazówek, w szczególności zasady skracania. W artykule przeglądowym [11] nie zamieszczono tablicy Cayleya dla operacji Kuratowskiego. Sporządzenie takiej tablicy wydawało mi się przydatne do wyciągania dalszych wniosków i opublikowaliśmy ją w artykule [35]. Okazało się, że pozwoliło to uzyskać sporo nowych informacji, w tym i to, że grupa

automorfizmów monoidu złożonego z operacji Kuratowskiego to  $\mathbb{Z}_2$ . Tablicę Cayleya dla operacji Kuratowskiego prezentujemy poniżej.

Tabela Cayleya dla operacji Kuratowskiego

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$
$\sigma_1$	$\sigma_0$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$
$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$
$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$
$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$
$\sigma_5$	$\sigma_4$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$
$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$
$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$
$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$
$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$
$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$
$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$
$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$
$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$

Patrząc kategoryjnie na powyższą tablicę, należałoby każdą z operacji Kuratowskiego widzieć jako przekształcenie monoidu, złożonego z wszystkich operacji Kuratowskiego, w siebie. Wtedy dowolnej operacji  $\sigma_n$  można przyporządkować dwie strzałki:

$$\sigma_k \mapsto \sigma_n \sigma_k \text{ oraz } \sigma_k \mapsto \sigma_k \sigma_n.$$

Dostajemy kategorię, której obiektami są półgrupy — tylko niektóre, z wymienionych w [35] — natomiast strzałki to na przykład zawierania między tymi półgrupami. Tego rodzaju szczegóły wraz z uzasadnieniami, mogłyby być dopisane do artykułu [35] jako kolejny rozdział. Nie zaburzyłoby to założenia, że w artykule opisano te aspekty, które są sprawdzalne techniką korzystającą jedynie z „kartki i ołówka”. Sporządzenie pełnej listy półgrup składających się z operacji Kuratowskiego względem kilku porównywalnych topologii, o których mowa w artykule [3], będzie wymagało programów komputerowych. Myślę, że jest to interesujący temat badawczy, ale na przyszłość.

Przygotowując rozprawę korzystałam z literatury anglojęzycznej. W literaturze polskiej bywają używane spolszczenia, które nie całkiem przypadły mi do gustu. W szczególności dotyczy to pojęć *pullback* oraz *pushout*. Postanowiłam pozostać przy oryginalnej nazwie, czasami modyfikowanej z powodów fleksyjnych. W nazwie *Cantorval* zachowałam literę „v”, a literę „c” czytam jako „k”, zgodnie ze zwyczajem jaki dotyczy continuów, gdzie pisze się

*continuum*, ale czyta „kontinuum”. Drobnym odstępstwem od takiej zasady jest określenie „kowariantny”, bo jego angielskim odpowiednikiem jest słowo *covariant*, a także odpowiedniość amalgamacja–*amalgamation*. Komentarze subiektywne są wyróżnione przez użycie pierwszej osoby liczby pojedynczej.

Rozprawa ta jest zorganizowana następująco. Zaczynamy od kilku uwag statystycznych — na podstawie MathSciNet — oraz historycznych, zwracających uwagę na dwoisty charakter teorii kategorii. Wzorem skryptu [30] teorią kategorii można zajmować się jako gałęzią matematyki interesującą samą w sobie. Zgodnie z tematem tej rozprawy, a także za przykładem niektórych matematyków wymienionych w pierwszym akapicie, porównaj [29], teorię kategorii warto rozwijać zwracając uwagę na jej powiązania z innymi gałęziami matematyki. W szczególności można widzieć w niej konkurencję dla teorii zbiorów, a także inspirację do rozwijania znanych działów teorii mnogości i topologii. Zademonstrowaliśmy to w rozdziale 1.2.1, gdzie komentujemy sposoby wykorzystania pojęć takich jak drzewo, przestrzeń gałęzi, ultrametryka itp., itd. W rozdziale 2 przytaczamy niektóre pojęcia niezbędne dla wyjaśnienia roli diagramów. W kolejnym rozdziale przeprowadzamy analizę dowodu twierdzenia Knastera–Reichbacha. Analiza ta ma walory dydaktyczne, ponieważ zamieszczone tam diagramy ilustrują, to co trudno ująć słowami. W ostatnim podrozdziale tego rozdziału udało się omówić inne aspekty, o których mowa w artykule [19]. Mianowicie, w artykule [36], w którym nie powołujemy się wprost na teorię kategorii, badana jest kategoria przestrzeni metrycznych  $\sigma$ -dyskretnych z zanurzeniami w roli morfizmów. Jeśli ograniczyć się do podkategorii wyznaczonej przez przestrzenie metryczne rozproszone, to morfizmy mogą być interpretowane jako odwzorowania ciągle względem topologii wyznaczonej przez liniowy porządek na liczbach porządkowych. Istotnie, zgodnie z twierdzeniem R. Telgarskiego, dowolną przestrzeń metryczną rozproszoną można zanurzyć w liczby porządkowe, porównaj [36, Proposition 19]. Okazało się, że w tym przypadku korzystanie z pojęć teorii kategorii nie jest pomocne. Podobne wnioski nasunęły się — po wyczerpującej dyskusji ze współautorami — w sprawie Cantorvala. Początkowo planowałam opisać go jako granicę Fraïsségo. Rezultaty, które przy tej okazji otrzymaliśmy są opublikowane w artykule [6]. Ich obszernie streszczenie jest zamieszczone jako rozdział 4. W rozdziale 5 przypominamy pojęcia amalgamacji oraz amalgamacji odwrotnej a także ich szczególne przypadki — *pushout* oraz *pullback* odpowiednio. Omawiamy te pojęcia w dwóch szczególnych kategoriach: **Set** czyli kategorii, której obiektami są zbiory a strzałkami funkcje oraz **Top** czyli kategorii, której obiektami są przestrzenie topologiczne a strzałkami przekształcenia ciągłe. W rozdziale 6 prezentujemy główną ideę tej rozprawy czyli ciągu Fraïsségo: definicję, kryterium istnienia oraz wła-



sności. W podrozdziale [6.2] koncentrujemy się na kategorii  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$  czyli pewnej kategorii przecinkowej (ang. *comma category*) związanej z kategorią odwrotną do kategorii  $\mathbf{Finset}$ . Następnie te zanurzenia podzbiorów domkniętych nigdziegęstych zbioru Cantora, których obrazy również są podzbiorami nigdziegęstymi, charakteryzujemy przy pomocy ciągu Fraïsségo w kategorii  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$  oraz własności  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ -przedłużania. W rozdziale 7 omawiamy strukturę oraz podstawowe fakty dotyczące granic Fraïsségo w kontekście ciągów odwrotnych. Rozważamy szczególną parę kategorii: kategorię  $\mathbf{C}$  oraz jej podkategorię pełną  $\mathbf{D}$  spełniające warunki (L0)–(L3). Podajemy również fakty, które są konsekwencjami wniosku [21, Cor. 3.8] zastosowanego do kategorii odwrotnej do  $\mathbf{D}$ . Łączą one własność *uniwersalności projektywnej* oraz własność *jednorodności projektywnej* z pojęciem obiektu *D-generycznego*. W rozdziale 8 zebrane są komentarze, które w przyszłości zostaną uwzględnione w artykułach wspólnych z promotorami a dotyczą m.in. kategorii zbiorów skończonych niepustych  $\mathbf{S}$  oraz jej liniowego wariantu  $\mathbf{S}_{\leq}$ . Na końcu stwierdzamy, że na zbiorze Cantora istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna, która jest silnie dodatnia, przyjmuje wartości wymierne na zbiorach domknięto-otwartych i spełnia pewien warunek jednorodności.

## 1.1 Teoria kategorii jako sposób rozumowania

MathSciNet uwzględnia około dziewięćdziesiąt gałęzi, tzn. numerów klasyfikacyjnych teorii kategorii. Dotyczy to numeracji zaczynającej się cyframi 18. Przykładowo: 18A05 *Definitions, generalizations*; 18B05 *Category of sets, characterizations*; 18B30 *Categories of topological spaces and continuous mappings*. Oprócz numeracji każda z gałęzi określona jest dodatkowymi pojęciami, które niekoniecznie są szerzej znane.

Teorię kategorii można określić jako teorię formalizmu związanego ze składaniem odwzorowań, gdyż różnorodne teorie matematyczne można reprezentować, badając jedynie własności przekształceń obiektów matematycznych będących przedmiotem zainteresowania danej teorii. Teoria kategorii pozwala analizować dowolne obiekty matematyczne z określoną strukturą za pomocą własności przekształceń, które tę strukturę zachowują. Za pierwszą pracę z teorii kategorii uznaje się pracę S. Eilenberga i S. Mac Lane’a z 1945 roku *General theory of natural equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society 58, str. 231–294. Autorzy wprowadzili w niej pojęcia kategorii, funktorów — morfizmów między kategoriami oraz transformacji naturalnych — morfizmów między funktorami. Pierwszą książką, w której teoria kategorii została wyłożona jest książka S. Eilenberga i N. Steenroda

z 1952 roku *Foundations of Algebraic Topology*. Choć teoria kategorii powstała na użytek topologii algebraicznej to szybko nastąpił jej rozwój w kierunku zastosowań do innych działów matematyki, głównie algebry ogólnej. Wiele przykładów kategorii to obiekty algebraiczne: grupy, grupy abelowe, monoidy wraz z homomorfizmami grup, grup abelowych oraz monoidów odpowiednio. Przyjrzyjmy się bliżej ostatniemu przykładowi. Niech  $(M, \star, e)$  będzie monoidem, gdzie  $e$  jest jego elementem neutralnym. Wówczas traktując  $M$  jako jedyny obiekt, zaś elementy  $M$  jako morfizmy (z dziedziną i przeciwdziedziną  $M$ ), a działanie  $\star$  jako złożenie morfizmów otrzymujemy kategorię.

Ostatecznie teoria kategorii stała się teorią samodzielną. Niezmiennie jednak uświadamia jedność wielu działów matematyki, które są często prezentowane jako oddzielne, niezwiązane ze sobą przedmioty. Jest tak ponieważ teoria kategorii, jako dział matematyki, bada nie tylko struktury matematyczne ale przede wszystkim związki między nimi. Zarówno uniwersalny język jak i metody teorii kategorii spowodowały ujednolicenie i uproszczenie wielu pojęć logiki, teorii zbiorów, teorii porządku, geometrii algebraicznej, analizy itd. Dodatkowym atutem staje się graficzne przedstawienie teorii, która dzięki temu wydaje się bardziej przejrzysta, czytelna oraz przystępna. Ze względu na jednoczącą moc struktur i konstrukcji można również teorią kategorii posłużyć się w fizyce — MathSciNet omawia kilkaset prac z zakresu *Quantum theory* i *Category theory* — oraz informatyce — MathSciNet zawiera około tysiąca prac z zakresu *Computer science* i *Category theory*. Zatem ma ona zastosowanie w dziedzinach, w których operacje czy procesy odgrywają kluczową rolę. W praktyce wykorzystuje się ją również w celu uchwycenia pewnych usprawnień, poprawy warunków eksperymentu lub unowocześnienia sprzętu albo stosowanych technologii podczas obserwacji pewnych zdarzeń. Ukazując schematy interesujące same w sobie, pozwala na szybsze dotarcie do problemów specyficznych dla tych dziedzin. Teoria kategorii jest zatem nie tylko działem matematyki, lecz także pewnym sposobem myślenia oraz wyrażania zależności pomiędzy różnymi obiektami. My oczywiście ograniczymy się do obiektów matematycznych. Kategoria to pojęcie wyodrębniające szereg algebraicznych własności rodzin morfizmów między obiektami matematycznymi tego samego typu — zbiorami, przestrzeniami topologicznymi, przestrzeniami liniowymi, grupami itp. — pod warunkiem, że te rodziny zawierają odwzorowania tożsamościowe i są zamknięte na superpozycję (iloczyn) odwzorowań.

## 1.2 Teoria mnogości, czyli o teorii zbiorów

Będziemy stosowali oznaczenia tradycyjne, przykładowo zgodne z książką K. Kunena [25]. Jednocześnie wprowadzimy kilka modyfikacji związanych z konwencjami zapożyczonymi z teorii kategorii. Mianowicie, wartość funkcji  $f: X \rightarrow Y$  w punkcie  $x$  będziemy oznaczać krótko przez  $fx$ , zamiast  $f(x)$ . Dziedzinę  $X$  funkcji  $f$  oznaczamy symbolem  $\text{dom } f$ , a jej przeciwdziedzinę  $Y$  symbolem  $\text{cod } f$ . Natomiast  $f[A]$  oznacza obraz zbioru  $A \subset X$ . Obraz dziedziny  $f[X]$  oznaczamy symbolem  $\text{rng } f$ . Nasze modyfikacje polegają na pomijaniu nawiasów, przy czym symbol  $\text{ran}(f)$ , patrz [25, str. 14], zastępujemy przez  $\text{rng } f \subset \text{cod } f$ . Symbolem  $X/f$  oznaczamy rozbitcie zbioru  $X$  na warstwy względem funkcji  $f$ , tzn.

$$X/f = \{x/f: x \in X\},$$

gdzie  $x/f$  oznacza warstwę punktu  $fx \in Y$ , czyli

$$x/f = f^{-1}[\{fx\}] = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(fx).$$

Złożenie funkcji  $f: X \rightarrow Y$  oraz  $g: Y \rightarrow Z$  oznaczamy symbolem  $gf$ . Funkcję  $\iota: A \rightarrow X$ , daną wzorem  $\iota x = x$ , nazywamy *włożeniem* podzbioru  $A \subset X$ . Złożenie  $f\iota$  nazywamy *zacieśnieniem* funkcji  $f$  do zbioru  $A$ , zaś funkcję  $f$  *przedłużeniem* funkcji  $f\iota$ . Mówimy, że rodzina  $\mathcal{A}$  jest *wpisana* w rodzinę  $\mathcal{B}$ , gdy dla dowolnego  $A \in \mathcal{A}$  istnieje  $B \in \mathcal{B}$  takie, że  $A \subset B$ , co oznaczamy  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  bądź  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ .

Założmy, że mamy dwie funkcje  $f$  oraz  $h$  o takiej samej dziedzinie, tzn.  $f: X \rightarrow Y$  oraz  $h: X \rightarrow Z$ . Pytamy kiedy istnieje funkcja  $g: Y \rightarrow Z$  taka, że  $h = gf$ . Innymi słowy, kiedy można dopełnić następujący diagram.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ Z & & \end{array}$$

Oczywista odpowiedź brzmi: uda się to, o ile  $X/f \succ X/h$ .

**Fakt 1.** *Założmy, że  $f: X \rightarrow Y$  oraz  $h: X \rightarrow Z$ . Wówczas istnieje funkcja  $g: Y \rightarrow Z$  taka, że  $h = gf$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X/f \succ X/h$ . Dodatkowo, jeśli  $f$  jest surjekcją, to funkcja  $g$  jest wyznaczona jednoznacznie.*  $\square$

Niech  $\mathcal{A}$  będzie rodziną zbiorów parami rozłącznych, przy czym dowolnemu  $A \in \mathcal{A}$  przypisana jest funkcja  $f_A: A \rightarrow B$  oraz włożenie  $\iota_A: A \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ . Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f_A: \bigcup \mathcal{A} \rightarrow B$$

spełniająca równość  $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f_A)_{\iota_A} = f_A$ , dla każdego  $A \in \mathcal{A}$ . Funkcję

$$\langle x_i \rangle_{i \in I}: I \rightarrow X \text{ daną wzorem } \langle x_i \rangle_{i \in I} k = x_k$$

nazywamy *ciągami* elementów  $X$ . Zbiór wszystkich takich ciągów oznaczamy symbolem  $X^I$ , zaś  $\prod_{i \in I} X_i$  oznacza zbiór wszystkich ciągów  $\langle x_i \rangle_{i \in I}$  spełniających warunek  $x_i \in X_i$ , dla każdego  $i \in I$ , który nazywamy *produktem* rodziny  $\{X_i: i \in I\}$ , a funkcję

$$\text{pr}_k: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k, \text{ daną wzorem } \text{pr}_k \langle x_i \rangle_{i \in I} = x_k,$$

nazywamy *rzutowaniem* na  $k$ -tą oś. Gdy  $I = \omega$  jest zbiorem liczb naturalnych, to zamiast  $n \in I$  piszemy  $n < \omega$ . Jeśli  $I = \{0, \dots, n-1\}$ , to ciąg  $\langle x_i \rangle_{i \in I}$  oznaczamy także  $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ , nazywając go *ciągami  $n$ -elementowym*. Przyjmujemy konwencję  $n = \{0, \dots, n-1\}$ , a więc  $X^{\{0, \dots, n-1\}} = X^n$ . Zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach ze zbioru  $X$  oznaczamy  $\text{Seq } X$ , czyli

$$\bigcup_{n < \omega} X^n = \text{Seq } X.$$

Przyjmujemy, że  $s \leq t$ , gdy ciąg  $t \in \text{Seq } X$  jest przedłużeniem  $s \in \text{Seq } X$ . Gdy  $s \in \text{Seq } X$  oraz  $x \in X$ , to  $s \frown x$  oznacza *konkatenację*, czyli jedyne przedłużenie funkcji  $s$  na zbiór  $\text{dom } s + 1$ , które spełnia warunek  $(s \frown x) \text{ dom } s = x$ .

Przypominamy, że zbiór  $X$  jest *tranzytywny* gdy zawiera każdy swój element, tzn.  $\bigcup X \subset X$ . Zbiór tranzytywny, w którym relacja należenia  $\in$  jest liniowym (dobrym) porządkiem nazywamy *liczbą porządkową*. *Liczby kardynalne* to te liczby porządkowe, które nie są równoliczne z żadnym ze swoich elementów. Moc zbioru  $X$  to liczba kardynalna z nim równoliczna, którą oznaczamy  $|X|$ . Zatem dla dowolnego  $s \in \text{Seq } X$  mamy  $\text{dom } s = |s|$ , a jeśli ponadto  $s \neq \emptyset$ , to  $\text{dom } s = \{0, 1, \dots, |s| - 1\}$ .

### 1.2.1 Drzewa i przestrzenie gałęzi. Operator $\partial$

Wśród struktur matematycznych znaczącą rolę odgrywają zbiory częściowo uporządkowane, które będziemy nazywali porządkami. Są to struktury

określane aksjomatycznie. Uznaje się je za jedno z najważniejszych narzędzi współczesnej teorii mnogości, zwłaszcza teorii tzw. wymuszania (forsingu, ang. *forcing*). Szczególnym rodzajem porządków są *drzewa*, czyli te porządki, w których wszystkie przedziały początkowe są dobrze uporządkowane. Przypomnijmy, że *przedziałem początkowym* w porządku  $\langle P, \leq \rangle$  nazywamy zbiór postaci

$$(\leftarrow, p) = \{q \in P : q < p\},$$

gdzie  $p \in P$ . Ta definicja dopuszcza brak elementu najmniejszego w drzewie. *Łańcuch* to podzbiór liniowo uporządkowany. Pisząc *drzewo* mamy na myśli taki porządek  $\langle T, \leq \rangle$ , w którym dla każdego  $t \in T$  przedział początkowy  $(\leftarrow, t)$  jest łańcuchem skończonym, przy czym moc zbioru  $(\leftarrow, t)$ , a więc wobec przyjętych ograniczeń również jego typ porządkowy, nazywamy *wysokością* elementu  $t$  w drzewie  $T$  i oznaczamy symbolem  $ht\,t$ . *Bezpośrednim następnikiem* elementu  $t \in T$  nazywamy taki element  $s > t$ , dla którego przedział  $(t, s)$  jest pusty. Zbiór wszystkich bezpośrednich następników elementu  $t$  oznaczamy przez  $\text{succ}\,t$ , natomiast przez  $\max T$  oznaczamy zbiór wszystkich elementów maksymalnych drzewa  $T$ . Elementy maksymalne drzewa nazywamy *liśćmi*. *Poziom  $n$ -ty* drzewa  $\langle T, \leq \rangle$  to zbiór

$$\text{Lev}_n T = \{t \in T : (\leftarrow, t) \text{ ma dokładnie } n \text{ elementów}\}.$$

*Wysokość* drzewa  $\langle T, \leq \rangle$ , oznaczana przez  $ht\,T$ , to najmniejsza liczba porządkowa  $\alpha$ , dla której poziom  $\text{Lev}_\alpha T$  jest pusty. Zgodnie z przyjętymi założeniami wysokość drzewa jest albo liczbą naturalną albo liczbą  $\omega$ . Skoro każdy element o niezerowej wysokości jest następnikiem dokładnie jednego elementu, to dla każdej pary  $m < n$  istnieje dokładnie jedna taka funkcja

$$\pi_m^n : \text{Lev}_n T \rightarrow \text{Lev}_m T, \text{ że } \pi_m^n t < t \text{ dla każdego } t \in \text{Lev}_n T.$$

Odwzorowanie  $\pi_m^n$  będziemy nazywać *rzutowaniem kanonicznym*. *Gałęź* drzewa to maksymalny w sensie inkluzji łańcuch w tym drzewie. Zbiór wszystkich gałęzi drzewa  $T$  oznaczamy symbolem  $\partial T$ . Funkcję

$$\pi_n : \partial T \rightarrow \text{Lev}_n T$$

daną wzorem  $\pi_n l = \bigcap (l \cap \text{Lev}_n T)$  również będziemy nazywali rzutowaniem kanonicznym.

Drzewa wysokości  $\omega$  prowadzą w naturalny sposób do przestrzeni metryzowalnych. Dla każdego  $t \in T$  niech  $t^+ = \{l \in \partial T : t \in l\}$ . Rodzina  $\{t^+\}_{t \in T}$  generuje topologię na zbiorze  $\partial T$  oraz jest bazą tej topologii. Tak zdefiniowana topologia jest metryzowalna. Istotnie, odległość  $\rho(p, q)$  dwóch gałęzi

$p, q \in \partial T$  określamy wzorem

$$\rho(p, q) = \frac{1}{|p \cap q| + 1}.$$

Dowolny podzbiór postaci  $t^+$  jest kulą otwartą o środku w każdym swoim punkcie i promieniu  $\frac{1}{\text{ht } t + 1}$ . Istotnie, ustalmy  $p, q \in t^+$ ,  $p \neq q$ . Wtedy  $t \in p \cap q$ , a więc

$$\rho(p, q) = \frac{1}{|p \cap q| + 1} \leq \frac{1}{\text{ht } t + 2} < \frac{1}{\text{ht } t + 1}.$$

Oznacza to, że  $t^+ \subset K(p, \frac{1}{\text{ht } t + 1})$  dla każdego  $p \in t^+$ . Załóżmy teraz, że

$$p \in t^+ \text{ oraz } 0 < \rho(p, q) < \frac{1}{\text{ht } t + 1}.$$

Wtedy  $\text{ht } t < |p \cap q|$ . Skoro  $t \in p$ , to również  $t \in q$ . Ponadto każdy podzbiór postaci  $t^+$  jest również domknięty. Dokładniej,

$$\text{jeśli } p \notin t^+, \text{ to } K(p, \frac{1}{\text{ht } t + 1}) \cap t^+ = \emptyset.$$

Przypuśćmy, że  $q \in K(p, \frac{1}{\text{ht } t + 1}) \cap t^+$ . Wtedy  $\text{ht } t < |p \cap q|$  oraz  $t \in q$ , a więc  $t \in p$ ; sprzeczność z  $p \notin t^+$ . Zatem przestrzeń  $\partial T$  jest przestrzenią zero-wymiarową ponieważ ma bazę złożoną z podzbiorów domknięto-otwartych. Przestrzeń  $\partial T$  będziemy nazywać *przestrzenią gałęzi* drzewa  $T$ .

**Fakt 2.** Dla każdego drzewa  $T$  przestrzeń metryczna  $\langle \partial T, \rho \rangle$  jest zupełna.

*Dowód.* Ustalmy drzewo  $T$  oraz ciąg Cauchy'ego  $\langle p_n \rangle_{n < \omega}$  w przestrzeni gałęzi  $\langle \partial T, \rho \rangle$ . Dla każdego  $n > 0$  istnieje takie  $m_n$ , że

$$\rho(p_i, p_j) < \frac{1}{n} \text{ dla } i, j \geq m_n.$$

Możemy założyć, że ciąg  $\langle m_n \rangle_{n < \omega}$  jest rosnący. Pokażemy, że

$$p = \bigcup_{n > 0} (p_{m_n} \cap \text{Lev}_n T)$$

jest gałęzią drzewa  $T$ . Ustalmy  $s, t \in p$ . Możemy założyć, że  $\text{ht } s \leq \text{ht } t$ . Istnieje takie  $k$  oraz  $n$ , że

$$s \in p_{m_k} \cap \text{Lev}_k T \text{ oraz } t \in p_{m_n} \cap \text{Lev}_n T.$$

Skoro  $\text{ht } s \leq \text{ht } t$ , to  $k \leq n$ . Z drugiej strony

$$\rho(p_{m_k}, p_{m_n}) < \frac{1}{k}, \text{ a więc } k \leq |p_{m_k} \cap p_{m_n}|.$$

Stąd  $s \in p_{m_n}$ , a więc  $s \leq t$ . Zauważmy, że  $\rho(p, p_{m_n}) < \frac{1}{n}$  dla  $n > 0$ , a więc gałąź  $p$  jest granicą podciągu  $\langle p_{m_n} \rangle_{n < \omega}$ .  $\square$

Okazuje się, że wszystkie przestrzenie zerowymiarowe, ośrodkowe, metryzowalne w sposób zupełny, są w istocie przestrzeniami gałęzi. Przypomnijmy, że przestrzeń metryczna jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia *warunek Cantora*: każdy zstępujący ciąg podzbiorów domkniętych niepustych o średnicach dążących do zera ma przecięcie niepuste. Przestrzenie metryczne ośrodkowe mają bazę przeliczalną, a więc wobec zerowymiarowości, dowolne pokrycie zbiorami domknięto-otwartymi takich przestrzeni można zastąpić rozbiem na zbiory domknięto-otwarte, wynika to z tego co następuje.

**Fakt 3.** *Dla dowolnego ciągu  $\langle A_n \rangle_{n < \omega}$  niech ciąg  $\langle B_n \rangle_{n < \omega}$  będzie dany wzorami*

$$B_0 = A_0 \text{ oraz } B_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \text{ dla } n < \omega.$$

*Wyrazy ciągu  $\langle B_n \rangle_{n < \omega}$  są parami rozłączne oraz spełniona jest równość*

$$A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_n,$$

*dla  $n < \omega$ .*

□

**Stwierdzenie 4.** *Każda przestrzeń zerowymiarowa, ośrodkowa, metryzowalna w sposób zupełny, jest homeomorficzna z przestrzenią gałęzi pewnego drzewa.*

*Dowód.* Niech  $\langle X, \rho \rangle$  będzie przestrzenią metryczną zupełną, zerowymiarową oraz ośrodkową. Niech  $\mathcal{B} \subset \text{CO}(X)$  będzie bazą przeliczalną przestrzeni  $X$ . Niech  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{B}$  będzie pokryciem przestrzeni  $X$  zbiorami o średnicy mniejszej niż 1. Korzystając z faktu 3 o urozłącznianiu możemy założyć, że rodzina  $\mathcal{R}_1$  jest rozbiem. Indukcyjnie definiujemy taki ciąg rozbić  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots \subset \mathcal{B}$ , że dla każdego  $n > 0$ :

- rozbiecie  $\mathcal{R}_{n+1}$  jest wpisane w  $\mathcal{R}_n$ ,
- rozbiecie  $\mathcal{R}_n$  składa się ze zbiorów o średnicy mniejszej niż  $\frac{1}{n}$ .

Otrzymujemy w ten sposób drzewo  $T = \bigcup_{n > 0} \mathcal{R}_n$  uporządkowane przez odwrotną inkluzję. Dla każdego  $x \in X$  definiujemy rodzinę

$$fx = \{V \in T : x \in V\}.$$

Pokażemy, że wartości funkcji  $f$  są gałęziami drzewa  $T$ , tzn.  $f: X \rightarrow \partial T$ . Ustalmy  $U, V \in fx$ . Możemy założyć, że  $\text{ht } U \leq \text{ht } V$ . Istnieje takie  $W \leq V$ , że  $\text{ht } U = \text{ht } W$ . Skoro każdy poziom drzewa  $T$  jest rodziną rozłączną oraz

$x \in U \cap W$ , to  $W = U$ , a więc  $V \subset U$ .

Z zupełności przestrzeni metrycznej  $X$  oraz definicji drzewa  $T$  wynika, że każda gałąź  $l$  drzewa  $T$  ma przekrój jednoelementowy  $\cap l$ , gdyż jest to przekrój niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera. Wtedy  $\cap \cap l \in X$ . Istotnie, jeśli  $\{a\} = \cap l$ , to  $a = \cap \cap l$ . Zatem funkcja  $g: \partial T \rightarrow X$  dana wzorem  $gl = \cap \cap l$  jest poprawnie określona.

Pokażemy, że funkcje  $f$  oraz  $g$  są ciągłe. W tym celu ustalmy zbiór bazowy  $V^+ = \{l \in \partial T: V \in l\}$ . Wówczas:

$$x \in f^{-1}[V^+] \iff fx \in V^+ \iff V \in fx \iff x \in V.$$

Zatem  $f^{-1}[V^+] = V$ . Ustalmy  $n$  oraz  $V \in \mathcal{R}_n$ . Wtedy

$$g^{-1}[V] = \{l \in \partial T: \bigcap \bigcap l \in V\} = \{l \in \partial T: V \in l\} = V^+.$$

Wystarczy zauważyć, że rodzina  $\bigcup_{n>0} \mathcal{R}_n$  jest bazą przestrzeni  $X$ . Ponadto  $fg = \text{id}_{\partial T}$  oraz  $gf = \text{id}_X$ .  $\square$

*Ciężarem* albo *wagą*  $w(X)$  przestrzeni topologicznej  $X$  nazywamy minimalną moc jej bazy, tzn.

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}|: \mathcal{B} \text{ jest bazą przestrzeni } X\}.$$

Załóżmy, że  $\mathfrak{m}$  jest przestrzenią dyskretną. Produkt kartezjański  $\mathfrak{m}^\omega$  jest zbiorem wszystkich funkcji postaci  $\omega \rightarrow \mathfrak{m}$ , a więc dla każdego  $n < \omega$  dane jest rzutowanie  $\text{pr}_n: \mathfrak{m}^\omega \rightarrow \mathfrak{m}$ , gdzie  $\text{pr}_n \langle x_k \rangle_{k<\omega} = x_n$ . Zgodnie z [9, str. 320], jeśli  $\mathfrak{m}$  jest nieskończoną liczbą kardynalną, to produkt  $\mathfrak{m}^\omega$  z topologią produktową nazywamy *przestrzenią Baire'a* o ciężarze  $\mathfrak{m}$  oraz oznaczamy symbolem  $B(\mathfrak{m})$ . Odnotujmy, że przestrzeń  $B(\mathfrak{m}) = \partial(\text{Seq } \mathfrak{m})$  jest także przestrzenią gałęzi drzewa, którego  $n$ -ty poziom to produkt  $\mathfrak{m}^{n+1}$ , zaś porządek jest wyznaczony przez przedłużanie funkcji.

Niech  $T$  będzie drzewem mocy  $\mathfrak{m}$ , w którym każdy element ma niepusty zbiór następników. Jeśli  $\mathfrak{m} \neq \emptyset$ , skoro dowolny przedział początkowy w  $T$  jest łańcuchem skończonym, to przestrzeń gałęzi  $\partial T$  odpowiada podzbirowi domkniętemu przestrzeni Baire'a  $B(\mathfrak{m})$ . Aby to uzasadnić, określimy zanurzenie  $F: \partial T \rightarrow B(\mathfrak{m})$  takie, że obraz  $F[\partial T]$  jest domkniętym podzbiorem  $B(\mathfrak{m})$ . Mianowicie, niech

$$f: \text{Lev}_0 T \rightarrow \mathfrak{m}^1$$

będzie dowolną funkcją różnowartościową. Dalej indukcyjnie, jeśli  $\alpha \in \text{Lev}_n T$  oraz  $f\alpha \in \mathfrak{m}^{n+1}$  jest określone, to rozszerzamy funkcję  $f$  tak, aby bezpośrednie następniki  $\alpha$  w drzewie  $T$  przechodziły w sposób różnowartościowy na



bezpośrednie następniki  $f\alpha$  w drzewie dla którego  $B(\mathbf{m})$  jest przestrzenią gałęzi. Innymi słowy, funkcja

$$f: T \rightarrow \bigcup_{n < \omega} \mathbf{m}^{n+1}$$

jest rosnąca oraz obraz drzewa  $T$  jest drzewem. Gdy  $l \in \partial T$ , to kładziemy

$$l_n = l \cap \text{Lev}_n T, \text{ a następnie } Fl = \langle fl_n \rangle_{n < \omega}.$$

Dla dowolnego  $t \in T$  mamy  $F[t^+] = F[\partial T] \cap (ft)^+$ , co wobec różnowartościowości  $F$  potwierdza, iż  $F$  jest zanurzeniem. Uogólnienia powyższej metody zastosowaliśmy kilkakrotnie w artykule [36], gdzie odpowiednikiem rodziny  $\{t^+ : t \in \text{Lev}_n T\}$  są *disjoint open refinements*, np. takie jak w [36, Theorem 3].

**Fakt 5.** *Przestrzeń metryczna zupełna wagi  $\mathbf{m}$  jest obrazem ciągłym przestrzeni Baire'a  $B(\mathbf{m})$ .*

*Dowód.* Ustalmy przestrzeń metryczną zupełną  $X$  wagi  $\mathbf{m}$ . Niech

$$\mathcal{P}_0 = \{V_s : s \in \mathbf{m}^1\}$$

będzie pokryciem otwartym przestrzeni  $X$  składającym się ze zbiorów o średnicy mniejszej niż 1. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy pokrycia otwarte  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$  oraz funkcję indeksującą

$$V_{(\cdot)} : \{s \in \text{Seq } \mathbf{m} : 0 < |s| \leq n+1\} \rightarrow \mathcal{P}X$$

o następujących własnościach:

- (1.) Dla każdego  $m \leq n$  pokrycie  $\mathcal{P}_m = \{V_s : s \in \mathbf{m}^{m+1}\}$  składa się z podzbiorów otwartych o średnicy mniejszej niż  $\frac{1}{m+1}$ .
- (2.) Dla każdego  $s, t \in \text{Seq } \mathbf{m}$ , jeśli  $\emptyset \neq s < t$  oraz  $|t| \leq n$ , to  $\text{cl } V_t \subset V_s$ .
- (3.) Dla każdego  $0 < m \leq n$  oraz  $U \in \mathcal{P}_m$  istnieje dokładnie jedno takie  $s \in \mathbf{m}^m$ , że  $\text{cl } U \subset V_s \in \mathcal{P}_{m-1}$ .

Niech  $\mathcal{B}$  będzie bazą przestrzeni  $X$  mocy  $\mathbf{m}$ . Dla każdego  $U \in \mathcal{P}_n$  niech

$$\mathcal{R}_U = \{W \in \mathcal{B} : \text{cl } W \subset U, \text{diam } W < \frac{1}{n+2}\} = \{W_{U,\alpha} : \alpha < \mathbf{m}\}.$$

Dla każdego  $s \frown \alpha \in \mathbf{m}^{n+2}$  definiujemy  $V_{s \frown \alpha} = W_{V_s, \alpha}$  oraz

$$\mathcal{P}_{n+1} = \{V_{s \frown \alpha} : s \frown \alpha \in \mathbf{m}^{n+2}\}.$$

Zauważmy, że dla każdego  $x \in \mathfrak{m}^\omega$  przecięcie  $\bigcap_{n>0} V_{x|n}$  ma dokładnie jeden element. Zatem funkcja  $f: \mathfrak{m}^\omega \rightarrow X$  dana wzorem  $fx = \bigcap \bigcap_{n>0} V_{x|n}$  jest określona poprawnie. Z warunku (3.) wynika, że funkcja  $f$  jest surjekcją. Zauważmy, że rodzina

$$\bigcup_{n<\omega} \mathcal{P}_n = \{V_s: s \in \text{Seq } \mathfrak{m} \setminus \{\emptyset\}\}$$

jest bazą przestrzeni  $X$ . Zakładamy, że  $fx \in V_s$ . Istnieje takie  $n < \omega$ , że  $K(fx, \frac{1}{n}) \subset V_s$ . Z warunku (1.) oraz z tego, że  $fx \in V_{x|n}$ , wynika, że  $V_{x|n} \subset K(fx, \frac{1}{n})$ . Zatem podzbiór  $\bigcap_{m \leq n} x/\text{pr}_m$  jest takim otoczeniem otwartym punktu  $x$ , że

$$f[\bigcap_{m \leq n} x/\text{pr}_m] \subset V_{x|n} \subset V_s.$$

□

**Wniosek 6.** *Dowolna przestrzeń metryczna zupełna jest obrazem ciągłym przestrzeni metrycznej zupełnej zerowymiarowej.* □

Metryka  $\rho$  przestrzeni gałęzi  $\partial T$  drzewa  $T$  ma pewną dodatkową własność: dla każdego  $p, q, r \in \partial T$  zachodzi równość

$$\rho(p, r) \leq \max\{\rho(p, q), \rho(q, r)\}.$$

Mówimy wtedy, że metryka  $\rho$  jest *ultrametryką*. Pojęcie to pojawia się po raz pierwszy w artykule [20], porównaj MathSciNet. Przestrzeń gałęzi drzewa jest więc przestrzenią metryczną zerowymiarową, metryzowalną w sposób zupełny przez ultrametrykę. W zakresie przestrzeni metrycznych ośrodkowych powyższą implikację można odwrócić. Okazuje się, że założenie ośrodkowości przestrzeni jest istotne, mamy bowiem następujące twierdzenia J. de Grota [12], K. Mority [31] oraz P. Roya [40].

*Metryka przestrzeni jest równoważna ultrametryce wtedy i tylko wtedy, gdy duży wymiar indukcyjny tej przestrzeni jest równy 0.*

*Istnieje przestrzeń metryczna zupełna zerowymiarowa, której duży wymiar indukcyjny jest równy 1.*

*Istnieje przestrzeń metryczna zupełna zerowymiarowa, której metryka nie ma równoważnej ultrametryki.*

Z analogiczną sytuacją zetknęłam się w trakcie badań naukowych, których wyniki opublikowaliśmy w artykule [36]. W tym artykule omawiamy uogólnienia znanych faktów dotyczących przeliczalnych przestrzeni metrycznych.

Metodologicznym założeniem było to, aby zbadać uogólnienia polegające na pominięciu założenia ośrodkowości. Wtedy nie można korzystać z narzędzi analogicznych do tych, o których mowa w fakcie 3. Wydaje się, że pojęcia teorii kategorii mogą być pomocne przy omawianiu i porządkowaniu wiedzy dotyczącej takich uogólnień. W licznych podręcznikach z deskryptywnej teorii mnogości omawiana jest charakterystyka podzbiorów domkniętych przy pomocy drzew, ale w zakresie przestrzeni metrycznych ośrodkowych. Można odnieść wrażenie, że język przestrzeni metrycznych zerowymiarowych wymaga uzupełnień, których źródłem może być teoria kategorii, dla przykładu w zakresie jaki zapoczątkowano w monografii [39].

W podręczniku [9] na stronie 491 sformułowano następujące twierdzenie: *Przestrzeń Baire'a  $B(\mathbf{m})$  jest przestrzenią uniwersalną dla przestrzeni metryzowalnych o nieskończonym ciężarze  $\mathbf{m}$ , których duży wymiar indukcyjny jest równy zeru.* Porównując to twierdzenie ze stwierdzeniem 4 widzimy, że gdy założenia zerowymiarowości oraz ośrodkowości zastąpimy założeniami związanymi z dużym wymiarem indukcyjnym, to pojawiają się możliwości odkrywania uogólnień. Język teorii kategorii być może doprecyzuje, które z nich są interesujące. Innymi słowy, zastosowania teorii kategorii mogą polegać na następującym schemacie. Mamy określoną klasę przestrzeni topologicznych, w której istnieje przestrzeń uniwersalna. Innymi słowy, ustalona jest kategoria, w której jest obiekt słabo początkowy bądź słabo końcowy. Rozszerzamy klasę tak, aby wcześniej istniejąca przestrzeń uniwersalna przestała być przestrzenią uniwersalną w nowej klasie. Czy w tej klasie istnieje przestrzeń uniwersalna? Jeśli odniesiemy się do faktu 5 oraz wniosku 6 to raczej trudno taki schemat zastosować. Jednak gdy rozważymy klasy przestrzeni metrycznych, które są zerowymiarowe, zupełne oraz dodatkowo dopuszczają brak równości między innymi wymiarami, to powstają interesujące zagadnienia.

Podsumowując zawartość tego podrozdziału, zostały w nim między innymi przeanalizowane idee pochodzące z artykułu [23]. Dowodzone w nim stwierdzenia są nazwane faktami, bo powinny one być zaliczone do tzw. folkloru matematycznego. W moim przekonaniu, są to badania wstępne, które mogą być kontynuowane z szansami na ciekawe i oryginalne rezultaty.

## 2 Ogólnie o teorii kategorii

W dowolnej kategorii  $\mathbf{C}$  wyróżniamy następujące klasy:

- $\text{Ob}_{\mathbf{C}}$ , tj. klasę *obiektów*. Jej elementy oznaczamy wielkimi literami łacińskimi, tzn. piszemy  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ , gdy  $A$  jest obiektem kategorii  $\mathbf{C}$ .
- $\text{Arr}_{\mathbf{C}}$ , którą nazywamy klasą *strzałek* bądź klasą *morfizmów*. Strzałki (morfizmy) oznaczamy literami  $f, g, h, \dots$ , a także symbolami strzałek dopuszczalnymi w tekstach redagowanych w formacie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Piszemy  $f \in \text{Arr}_{\mathbf{C}}$ , gdy  $f$  jest strzałką kategorii  $\mathbf{C}$ .

Ponadto w dowolnej kategorii  $\mathbf{C}$  wyróżniamy następujące operacje:

- $\text{dom}_{\mathbf{C}}$ , tj. operację która dowolnej strzałce  $f: A \rightarrow B$  przyporządkowuje obiekt  $A = \text{dom}_{\mathbf{C}} f \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ .
- $\text{cod}_{\mathbf{C}}$ , tj. operację która dowolnej strzałce  $f: A \rightarrow B$  przyporządkowuje obiekt  $B = \text{cod}_{\mathbf{C}} f \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ .
- Operację *składania*  $\circ_{\mathbf{C}}$  spełniającą następujące warunki:
  - Parze strzałek  $\langle f, g \rangle$  przyporządkowana jest strzałka  $g \circ_{\mathbf{C}} f$ , o ile tylko  $\text{cod}_{\mathbf{C}} f = \text{dom}_{\mathbf{C}} g$  — wtedy strzałki  $f$  i  $g$  nazywamy *składalnymi*.
  - Przyporządkowanie to jest *łączne*, tzn.

$$(h \circ_{\mathbf{C}} g) \circ_{\mathbf{C}} f = h \circ_{\mathbf{C}} (g \circ_{\mathbf{C}} f),$$

o ile  $\text{cod}_{\mathbf{C}} f = \text{dom}_{\mathbf{C}} g$  oraz  $\text{cod}_{\mathbf{C}} g = \text{dom}_{\mathbf{C}} h$ .

- Operację *identyczności*, która przyporządkowuje dowolnemu obiektowi  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  strzałkę  $\text{id}_{\mathbf{C},A}: A \rightarrow A$  spełniającą następujące warunki:
  - Jeśli  $\text{cod}_{\mathbf{C}} f = A = \text{dom}_{\mathbf{C}} g$ , to

$$\text{id}_{\mathbf{C},A} \circ_{\mathbf{C}} f = f \text{ oraz } g \circ_{\mathbf{C}} \text{id}_{\mathbf{C},A} = g.$$

Strzałkę  $\text{id}_{\mathbf{C},A}$  nazywamy *identycznością*.

Obiekty kategorii  $\mathbf{C}$  nazywamy również  $\mathbf{C}$ -obiektami, a strzałki kategorii  $\mathbf{C}$  nazywamy  $\mathbf{C}$ -strzałkami. Symbol  $\mathbf{C}(A, B)$  oznacza zbiór wszystkich  $\mathbf{C}$ -strzałek  $f$  takich, że  $\text{dom}_{\mathbf{C}} f = A$  oraz  $\text{cod}_{\mathbf{C}} f = B$ . Czasami opuszczamy indeks dolny  $(\cdot)_{\mathbf{C}}$ , gdy nie prowadzi to do nieporozumień, a złożenie  $g \circ_{\mathbf{C}} f$  oznaczamy krótko przez  $gf$ . Obiekt  $\text{dom } f$  nazywamy *dziędziną* strzałki  $f$ , a obiekt  $\text{cod } f$  nazywamy jej *przeciwdziędziną*. Następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{cod}_{\mathbf{C}} f = \text{cod } f & \xrightarrow{g} & \text{cod}_{\mathbf{C}} g = \text{cod } g \\ \uparrow f & \nearrow g \circ_{\mathbf{C}} f = gf & \\ \text{dom}_{\mathbf{C}} f = \text{dom } f & & \end{array}$$

ilustruje operację składania oraz zasady opuszczania symbolu  $\mathbf{C}$ .

Jeśli  $\mathbf{C}$  jest kategorią, to możemy zdefiniować kategorię  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ , która ma te same obiekty oraz strzałki, tj.  $\text{Ob}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} = \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  oraz  $\text{Arr}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} = \text{Arr}_{\mathbf{C}}$ . Operacje dla kategorii  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  definiujemy następująco:  $\text{dom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} = \text{cod}_{\mathbf{C}}$ ,  $\text{cod}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} = \text{dom}_{\mathbf{C}}$  oraz  $f \circ_{\mathbf{C}^{\text{op}}} g = g \circ_{\mathbf{C}} f$ . Zatem dostajemy  $\mathbf{C}^{\text{op}}(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$ . Kategorię  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  będziemy nazywali *kategorią przeciwną* do kategorii  $\mathbf{C}$ .

Kategorię  $\mathbf{D}$  nazywamy *podkategorią* kategorii  $\mathbf{C}$ , gdy spełnione są następujące warunki:

- $\text{Ob}_{\mathbf{D}} \subset \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ .
- $\{\text{id}_{\mathbf{C},A} : A \in \mathbf{D}\} \subset \text{Arr}_{\mathbf{D}} \subset \text{Arr}_{\mathbf{C}}$ .
- Dla dowolnej  $\mathbf{D}$ -strzałki  $f$  zachodzi  $\text{dom}_{\mathbf{D}} f = \text{dom}_{\mathbf{C}} f$  oraz  $\text{cod}_{\mathbf{D}} f = \text{cod}_{\mathbf{C}} f$ .
- Dla dowolnej pary  $\mathbf{D}$ -strzałek  $\langle f, g \rangle$  zachodzi  $g \circ_{\mathbf{D}} f = g \circ_{\mathbf{C}} f$ , o ile  $\text{dom}_{\mathbf{D}} g = \text{cod}_{\mathbf{D}} f$ .

Jeśli  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$ , to  $\text{id}_{\mathbf{C},A} = \text{id}_{\mathbf{D},A}$ . Fakt, że  $\mathbf{D}$  jest podkategorią kategorii  $\mathbf{C}$ , oznaczamy przez  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ . Mówimy, że podkategoria  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  jest *pełna*, gdy  $\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{C}(A, B)$  dla wszelkich  $\mathbf{D}$ -objektów  $A$  oraz  $B$ . Podkategoria  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  jest *współkońcowa* w kategorii  $\mathbf{C}$ , gdy dla dowolnego  $\mathbf{C}$ -objektu  $A$  istnieje strzałka  $f \in \text{Arr}_{\mathbf{C}}$  taka, że  $\text{dom}_{\mathbf{C}} f = A$  oraz  $\text{cod}_{\mathbf{C}} f \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$ . Jeśli  $f$  jest  $\mathbf{C}$ -strzałką taką, że  $\text{dom}_{\mathbf{C}} f = A$  oraz  $\text{cod}_{\mathbf{C}} f = B$ , to w skrócie będziemy pisali  $f : A \rightarrow B$ , a gdy nazwa strzałki jest nieistotna, to piszemy  $A \rightarrow B$ .

Poniżej podajemy kilka przykładowych kategorii, które są rozpatrywane w tej rozprawie.

KATEGORIA	OBIEKTY	STRZAŁKI
<b>Set</b>	Zbiory	Funkcje
<b>Finset</b>	Zbiory skończone	Funkcje
<b>Metr</b>	Przestrzenie metryczne	Odwzorowania nierozszerzające
<b>Top</b>	Przestrzenie topologiczne	Przekształcenia ciągłe
<b>P</b>	Porządek częściowy $\langle P, \leq \rangle$	Pary $\langle p, q \rangle \in P \times P$ takie, że $p \leq q$
<b>C/A</b>	<b>C</b> -strzałki, których przeciwdziedzina jest $A$	Strzałki $h \in \text{Arr}_{\mathbf{C}}$ takie, że $fh = g$ , gdzie $f, g \in \text{Ob}_{\mathbf{C}/A}$

Ustalmy kategorię  $\mathbf{C}$  względem której będziemy stosowali zasady opuszczania indeksu dolnego  $(\cdot)_{\mathbf{C}}$ . Mówimy, że strzałka  $g \in \text{Arr}$  jest *monomorfizmem*, gdy dla dowolnej pary strzałek  $f, f' \in \text{Arr}$  zachodzi

$$gf = gf' \Rightarrow f = f'.$$

Zauważmy, że złożenia  $gf$  oraz  $gf'$  mają sens gdy  $\text{cod } f = \text{dom } g = \text{cod } f'$ , zaś równość  $gf = gf'$  pociąga także  $\text{dom } f = \text{dom } f'$ , a więc gdy  $g$  jest monomorfizmem oraz  $f \neq f'$ , to  $gf \neq gf'$ , o ile  $gf$  oraz  $gf'$  mają sens. Jeśli strzałka  $A \rightarrow B$  jest monomorfizmem, to piszemy również  $A \rightarrowtail B$ . Strzałka  $f: A \rightarrow B$  jest *epimorfizmem*, gdy dla dowolnej pary strzałek  $g, g'$  zachodzi

$$gf = g'f \Rightarrow g = g',$$

co w skrócie zapisujemy  $A \twoheadrightarrow B$ . Innymi słowy, gdy  $f$  jest epimorfizmem, to  $g \neq g'$  pociąga  $gf \neq g'f$ , gdy  $gf$  oraz  $g'f$  mają sens. Jeśli strzałka  $f$  ma prawostronną odwrotność, czyli istnieje taka strzałka  $h$ , że  $fh = \text{id}_{\text{cod } f}$ , to nazywamy ją *retrakcją*, a jeśli ma lewostronną odwrotność to nazywamy ją *sekcją*. Zauważmy, że każda retrakcja jest epimorfizmem a każda sekcja jest monomorfizmem.

Obiekt  $A$  jest *izomorficzny* z obiektem  $B$ , gdy istnieją takie strzałki  $f$  oraz  $g$ , że

$$gf = \text{id}_A \text{ oraz } fg = \text{id}_B,$$

wtedy strzałki  $f, g$  nazywamy *izomorfizmami*. Izomorfizm jest monomorfizmem. Istotnie, niech  $gf = \text{id}_A$ . Jeśli  $fh = fh'$ , to  $gfh = gfh'$ , a więc także  $h = h'$ . Analogicznie dowodzimy, że izomorfizm jest epimorfizmem, korzystając z założenia  $fg = \text{id}_B$ . Dodajmy, że jeśli strzałka jest jednocześnie monomorfizmem oraz epimorfizmem to nie oznacza to, że jest ona izomorfizmem. Istotnie funkcja  $[0, 2\pi) \ni t \mapsto \cos t + i \sin t$  jest ciągłą bijekcją, która nie ma ciągłej odwrotności. Jeśli jednak strzałka jest monomorfizmem i retrakcją (lub epimorfizmem i sekcją) to jest izomorfizmem.

W rozważanych przez nas kategoriach morfizmy z obiektu  $A$  do obiektu  $B$  są trójkami postaci  $(f, A, B)$ , gdzie  $f$  jest pewną funkcją, a składanie morfizmów jest określone za pomocą zwykłego składania funkcji. Takie kategorie będziemy nazywać konkretnymi (porównaj [41, str. 38]). Zauważmy, że w konkretnej kategorii każda iniekcja jest monomorfizmem, a każda suriekcja jest epimorfizmem. Istotnie, niech  $i: A \rightarrow B$  będzie iniekcją oraz przypuśćmy, że  $f: X \rightarrow A, f': X \rightarrow A$  są morfizmami takimi, że  $if = if'$ . Oznacza to, że  $ifx = if'x$  dla każdego  $x \in X$ . Zatem  $fx = f'x$  dla każdego  $x \in X$ . Innymi słowy  $f = f'$ . Zatem rzeczywiście  $i$  jest monomorfizmem. Ustalmy teraz suriekcję  $s: A \rightarrow B$  oraz morfizmy

$$g: B \rightarrow X \text{ oraz } g': B \rightarrow X$$

spełniające równość  $gs = g's$ . Niech  $b \in B$ . Istnieje  $a \in A$  takie, że  $b = sa$ . Stąd

$$gb = gsa = g'sa = g'b.$$

Wobec dowolności  $b$  otrzymujemy  $g = g'$ , a zatem  $s$  jest epimorfizmem. Implikacje odwrotne nie są prawdziwe — co pokazuje następujący przykład. Rozważmy dowolne przekształcenie zbiorów  $f: X \rightarrow Y$ , które nie jest ani suriekcją ani iniekcją i rozważmy kategorię tylko o dwóch obiektach  $X, Y$  oraz trzech morfizmach  $\text{id}_X, \text{id}_Y, f$ . Morfizm  $f$  jest w tej kategorii monomorfizmem i epimorfizmem. Istotnie, jedyne możliwe złożenia w tej kategorii to  $f \text{id}_X$  oraz  $\text{id}_Y f$ . Zatem w oczywisty sposób

$$f \text{id}_X = f \text{id}_X \Rightarrow \text{id}_X = \text{id}_X \text{ oraz } \text{id}_Y f = \text{id}_Y f \Rightarrow \text{id}_Y = \text{id}_Y.$$

Kategoria ma *obiekt końcowy*  $A$ , gdy dla dowolnego obiektu  $B$  istnieje dokładnie jedna strzałka  $B \rightarrow A$ . Jeśli w powyższej definicji pominiemy warunek jedności to otrzymujemy tzw. *obiekt słabo końcowy*. Obiekty końcowe są izomorficzne. Istotnie, niech  $A$  oraz  $A'$  będą obiektami końcowymi. Wtedy istnieją strzałki

$$f: A \rightarrow A' \text{ oraz } g: A' \rightarrow A,$$

które możemy składać w dowolnej kolejności. Strzałka  $\text{id}_A$  jest strzałką z  $A$  do  $A$ , zaś  $\text{id}_{A'}$  jest strzałką z  $A'$  do  $A'$ , stąd, wobec jedyności strzałek w obiekt końcowy, dostajemy  $gf = \text{id}_A$  oraz  $fg = \text{id}_{A'}$ . Zazwyczaj obiekt końcowy oznaczamy symbolem  $1$ .

Obiekt końcowy (słabo końcowy) kategorii  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  będziemy nazywali *obiektem początkowym* (słabo początkowym) kategorii  $\mathbf{C}$ . Obiekt początkowy oznaczamy na ogół symbolem  $0$ . Obiekt, który jest jednocześnie początkowy i końcowy, nazywany jest *obiektem zerowym*. W kategoriach **Metr**, **Set**, **Finset** oraz **Top** obiektami końcowymi są zbiory jednoelementowe, a obiektem początkowym jest zbiór pusty. Istotnie,  $\emptyset$  jest strzałką między zbiorem pustym a dowolnym zbiorem  $A$ . Jednocześnie nie ma strzałki ze zbioru niepustego w  $\emptyset$ , tzn. w przypadku tych kategorii zachodzi  $\mathbf{C}(\emptyset, A) = \{\emptyset\}$ , ale dla  $A \neq \emptyset$  mamy  $\mathbf{C}(A, \emptyset) = \emptyset$ . Jeśli  $P$  jest porządkiem, to kategoria  $\mathbf{P}$  ma obiekt końcowy wtedy i tylko wtedy, gdy porządek  $P$  ma element największy oraz ma obiekt początkowy wtedy i tylko wtedy, gdy porządek  $P$  ma element najmniejszy. W kategorii  $\mathbf{C}/A$  obiektem końcowym jest identyczność  $\text{id}_A$ , która w literaturze bywa oznaczana przez  $1$ . To uzasadnia użycie symbolu  $1$  na oznaczenie obiektu końcowego. Natomiast obiekt początkowy  $0 \rightarrow A$  w kategorii  $\mathbf{C}/A$ .

Mówimy, że kategoria  $\mathbf{C}$  jest *skierowana*, jeśli dla każdych  $A, B \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  istnieje  $S \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  taki, że zarówno  $\mathbf{C}(A, S)$  oraz  $\mathbf{C}(B, S)$  są niepuste. W teorii modeli, gdzie strzałki są zanurzeniami tę własność nazywamy *wspólną własnością zanurzania* (ang. *joint embedding property*).

W języku teorii kategorii *własność amalgamacji* oznacza, że każdy diagram postaci (1) ma stożek pod sobą, czyli przemienny jest diagram (2).

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \\ \bullet & & \end{array} \qquad (2) \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \dashrightarrow & \bullet \end{array}$$

Jeśli kategoria ma obiekt słabo końcowy oraz własność amalgamacji to wówczas jest ona skierowana.

*Funktorem* (kowariantnym) z kategorii  $\mathbf{C}$  w kategorię  $\mathbf{D}$  nazywamy funkcję  $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  o następujących własnościach:

- dla dowolnego  $\mathbf{C}$ -obektu  $A$ , wartość  $FA$  jest  $\mathbf{D}$ -obiektem,
- dla dowolnej  $\mathbf{C}$ -strzałki  $f$ , wartość  $Ff$  jest  $\mathbf{D}$ -strzałką,



- dla dowolnej  $\mathbf{C}$ -strzałki  $gf$  zachodzi równość  $F(gf) = FgFf$ ,
- dla dowolnego  $\mathbf{C}$ -obektu  $A$  zachodzi równość  $F \text{id}_A = \text{id}_{FA}$ .

Zauważmy, że jeśli  $F$  jest funktorem kowariantnym z kategorii  $\mathbf{C}$  w kategorię  $\mathbf{D}$  oraz  $f: A \rightarrow B$  jest  $\mathbf{C}$ -strzałką, to

$$Ff = Ff \text{id}_A = FfF \text{id}_A = Ff \text{id}_{FA},$$

a więc  $\text{dom } Ff = \text{dom } \text{id}_{FA} = FA = F \text{dom } f$ . Analogicznie sprawdzamy, że  $\text{cod } Ff = F \text{cod } f$ . Dowolny funktor kowariantny z kategorii  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  w kategorię  $\mathbf{D}$  nazywamy *funktorem kontrawariantnym* z kategorii  $\mathbf{C}$  w kategorię  $\mathbf{D}$ . Zatem funktor kowariantny zachowuje operacje  $\text{dom}$  oraz  $\text{cod}$ , zaś funktor kontrawariantny zamienia te operacje rolami.

**Przykład 7.** Jeśli  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  są kategoriami wyznaczonymi przez porządki  $P$  i  $Q$ , to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy funktorami kowariantnymi  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$  a odwzorowaniami rosnącymi  $P \rightarrow Q$ . Zaż funktor kontrawariantny  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$  odpowiada jednoznacznie odwzorowaniu malejącemu  $P \rightarrow Q$ .

## 2.1 Diagramy

Funktor kowariantny  $F$  z kategorii  $\mathbf{I}$  w kategorię  $\mathbf{C}$  nazywamy także *diagramem*. Zatem diagram to klasa  $\mathbf{C}$ -obektów oraz klasa  $\mathbf{C}$ -strzałek indeksowana  $\mathbf{I}$ -obektami oraz  $\mathbf{I}$ -strzałkami odpowiednio. Wtedy kategorię  $\mathbf{I}$  nazywamy *kategorią indeksów* oraz, skrząc oznaczenia, nie będziemy precyzowali czym jest ta kategoria. Gdy zamiast „funktora” piszemy „diagram”, pozostawiamy domysłności czytelnika, że

$$i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}} \Rightarrow Fi = Di \in \text{Ob}_{\mathbf{C}},$$

zaś strzałki są przyporządkowane z zachowaniem kowariantności. Wartości funktora  $F$  nazywamy  $\mathcal{D}$ -obektami oraz  $\mathcal{D}$ -strzałkami odpowiednio.  $\mathcal{D}$ -obiekty oraz  $\mathcal{D}$ -strzałki niekoniecznie tworzą kategorię, bo może być tak, że  $i, j \in \text{Arr}_{\mathbf{I}}$ ,  $\text{dom } j \neq \text{cod } i$  oraz  $\text{dom } Fj = \text{cod } Fi$ .

Ustalmy diagram  $F: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ . *Stożkiem nad tym diagramem* jest  $\mathbf{C}$ -obiekt  $A$  wraz z rodziną

$$\langle A \xrightarrow{f_i} Fi \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$$

taką, że  $f_j = (Fd)f_i$  dla dowolnej  $\mathbf{I}$ -strzałki  $d: i \rightarrow j$  (w skrócie będziemy mówić, że rodzina  $\langle A \xrightarrow{f_i} Fi \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$  jest stożkiem nad tym diagramem), tzn. przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc}
A & & \\
f_i \downarrow & \searrow f_j & \\
Fi & \xrightarrow{Fd} & Fj
\end{array}$$

Stożkiem pod tym diagramem jest  $\mathbf{C}$ -obiekt  $A$  wraz z rodziną

$$\langle Fi \xrightarrow{f_i} A \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$$

taką, że  $f_j Fd = f_i$  dla dowolnej  $\mathbf{I}$ -strzałki  $d: i \rightarrow j$  (w skrócie będziemy mówić, że rodzina  $\langle Fi \xrightarrow{f_i} A \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$  jest stożkiem pod tym diagramem), tzn. przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc}
Fi & \xrightarrow{Fd} & Fj \\
f_i \downarrow & \swarrow f_j & \\
A & & 
\end{array}$$

Zauważmy, że jeśli diagram  $F$  składa się wyłącznie z obiektów, to każdy  $\mathbf{C}$ -obiekt  $A$  wraz z dowolną rodziną  $\mathbf{C}$ -strzałek  $\langle A \xrightarrow{f_i} Fi \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$  jest stożkiem nad tym diagramem, a wraz z dowolną rodziną  $\mathbf{C}$ -strzałek  $\langle Fi \xrightarrow{f_i} A \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$  jest stożkiem pod tym diagramem.

Gdy ustalimy konkretny diagram, to ustalamy tylko niektóre  $\mathbf{C}$ -obiekty oraz  $\mathbf{C}$ -strzałki — przy założeniu, że pracujemy w niezbyt dokładnie określonej kategorii  $\mathbf{C}$ . Z tych powodów konstrukcja kategorii stożków nad diagramem, może być modelowana poprzez stosowne dobranie kategorii  $\mathbf{C}$ . To sugeruje następującą procedurę wyszukiwania zastosowań, które są tematyką tej rozprawy. Mianowicie, ustalamy konkretną tematykę matematyczną, a następnie niektóre jej właściwości będziemy precyzowali w języku teorii kategorii. Jak to odnotował R. Engelking [9, str. 141]: *Pierwsze (wyczerpujące) przedstawienie podobnej tematyki zawiera książka [7], po ukazaniu się której systemy odwrotne weszły do powszechnego użycia.*

Zakończmy ten rozdział następującymi definicjami. *Granicą diagramu* nazywamy obiekt końcowy w kategorii stożków nad tym diagramem. Jeśli stożek  $\langle A \rightarrow Di \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$  jest granicą pewnego diagramu to odwzorowanie z obiektu  $A$  w obiekt  $Di$  oznaczamy  $d_i$ . *Kogranicą diagramu* nazywamy obiekt początkowy w kategorii stożków pod tym diagramem. Jeśli stożek  $\langle Di \rightarrow A \rangle_{i \in \text{Ob}_{\mathbf{I}}}$  jest kogranicą pewnego diagramu to odwzorowanie z obiektu  $Di$  w obiekt  $A$  oznaczamy  $d^i$ .

### 3 Analiza twierdzenia Knastera–Reichbacha

Twierdzenie Knastera–Reichbacha zostało opublikowane w artykule [19]. Ma ono kilka interesujących uszczegółowień — patrz artykuły [18], [13] oraz [38] a także rozdział 8.6 tego doktoratu.

#### 3.1 Zbiór Cantora jako granica odwrotna

Niech  $\mathbf{C}$  będzie kategorią, w której obiektami są niepuste skończone podzbiory ustalonego zbioru przeliczalnego, np. zbioru liczb naturalnych, zaś strzałki to odwzorowania między tymi podzbiórami. Rozważmy następujący diagram

$$S_0 \xleftarrow{s_0^1} S_1 \xleftarrow{s_1^2} S_2 \xleftarrow{\quad} \dots,$$

gdzie  $S_i \neq S_j$ , o ile  $i \neq j$ , oraz odwzorowania  $s_i^{i+1}: S_{i+1} \rightarrow S_i$  są surjekcjami. Jeśli  $\sup_{n < \omega} |S_n| < \omega$  to od pewnego miejsca surjekcje  $s_n$  są bijekcjami i granicą takiego ciągu jest  $S_n$ . Załóżmy więc, że  $\sup_{n < \omega} |S_n| \geq \omega$ . Ustalmy, jak można modyfikować kategorię  $\mathbf{C}$  tak, aby kategoria stożków miała obiekt końcowy bądź początkowy?

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych idei dotyczących granicy ciągu odwrotnego, w formie zapoczątkowanej przez S. Lefschetza [26], porównaj [9, str. 141]. Popatrzmy na nasz diagram jak na ciąg odwrotny  $\{S_n, s_m^n\}$ , gdzie

$$s_m^n = s_m^{m+1} s_{m+1}^{m+2} \dots s_{n-1}^n \text{ dla } m < n \text{ oraz } s_n^n = \text{id}_{S_n}.$$

Zachowujemy tu tradycyjne (umowne) oznaczanie ciągu  $\{S_n, s_m^n\}$ . Niech

$$G = \varprojlim \{S_n, s_m^n\} \subset \prod_{n < \omega} S_n$$

będzie granicą tego ciągu odwrotnego. Przypominamy, że *nicią* nazywamy ciąg

$$\langle x_n \rangle_{n < \omega} \in \prod_{n < \omega} S_n \text{ taki, że } s_m^n x_n = x_m, \text{ o ile } m \leq n.$$

Zatem  $G$  jest zbiorem wszystkich nici ciągu odwrotnego  $\{S_n, s_m^n\}$ . Z drugiej strony zbiór  $G$  jest przekrojem zbiorów

$$G_k = \{ \langle x_n \rangle_{n < \omega} \in \prod_{n < \omega} S_n : s_m^k x_k = x_m, \text{ o ile } m \leq k \}.$$

Zauważmy, że potencjalnymi kandydatami na obiekty w kategorii  $\mathbf{C}$  są zbiory  $S_n$ , zbiory  $G_n$ , produkty skończone  $\prod_{k \leq n} S_k$ , zbiór  $G$  oraz produkt nieskończony  $\prod_{n < \omega} S_n$ . Zaś kandydatami na strzałki są surjekcje  $s_m^n$ , rzutowania z wyżej wymienionych produktów oraz ich zacieśnienia do zbioru  $G$  bądź zbiorów  $G_n$ . Jednakże gdy położymy

$$s_k \langle x_n \rangle_{n < \omega} = x_k, \text{ gdzie } \langle x_n \rangle_{n < \omega} \in G,$$

to dostaniemy kategorię  $\mathbf{C}$  taką, że

$$\text{Ob}_{\mathbf{C}} = \{G\} \cup \{S_n : n < \omega\} \text{ oraz } \text{Arr}_{\mathbf{C}} = \{s_n : n < \omega\} \cup \{s_m^n : m \leq n\}.$$

Wtedy kategoria stożków nad naszym diagramem ma dokładnie jeden obiekt, tj. stożek wyznaczony przez  $G$  oraz rzutowania  $\{s_n : n < \omega\}$ , gdyż  $G$  jest jedynym obiektem początkowym w kategorii  $\mathbf{C}$ . Zaś w kategorii stożków pod naszym diagramem  $S_0$  wyznacza jej jedyny stożek, gdyż  $S_0$  jest jedynym obiektem końcowym kategorii  $\mathbf{C}$ . Zgodnie z definicjami granicy diagramu oraz kogranicy diagramu dostajemy, że  $G$  wyznacza granicę naszego diagramu, zaś  $S_0$  jego kogranicę. Wynika to z tego, że kategorie stożków mają dokładnie po jednym obiekcie, a więc jedyny obiekt w każdej z nich jest jednocześnie końcowy oraz początkowy. Przyjmijmy teraz, że obiekty kategorii  $\mathbf{C}$  to przestrzenie topologiczne, zaś strzałki to surjekcje ciągłe. Dowolny obiekt kategorii stożków jest reprezentowany przez przestrzeń  $X$  oraz surjekcje  $\pi_n : X \rightarrow S_n$  takie, że  $\pi_m = s_m^n \pi_n$  dla  $m \leq n < \omega$ . Wtedy dowolnemu punktowi  $a \in X$  możemy przyporządkować nie  $\langle \pi_n a \rangle_{n < \omega} \in \varprojlim \{S_n, s_m^n\} = G$ . Odwzorowanie  $a \mapsto \langle \pi_n a \rangle_{n < \omega}$  jest surjekcją  $X$  na  $G$ , a więc wyznacza ono strzałkę w kategorii stożków. Innymi słowy, wtedy obiekt  $G$  wraz z rzutowaniami  $s_n : G \rightarrow S_n$ , tj. surjekcjami spełniającymi warunki  $s_k = s_k^m s_m$ , jest obiektem końcowym w kategorii stożków.

Dowolnej liczbie naturalnej  $n < \omega$  przyporządkujmy podział  $\mathcal{B}_n$  zbioru Cantora  $2^\omega$  — a więc zakładamy  $G = 2^\omega$ , na podzbiory domknięto-otwarte tak, aby otrzymać ciąg podziałów

$$\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}_1 \prec \dots \prec \mathcal{B}_n \prec \dots,$$

którego suma  $\bigcup_{n < \omega} \mathcal{B}_n$  jest bazą zbiorów otwartych topologii zbioru Cantora. Zbiór Cantora jest przestrzenią zwartą, a więc rodziny  $\mathcal{B}_n$ , składające się z parami rozłącznych podzbiorów otwartych których sumą jest  $2^\omega$ , są skończone. Jeśli symbol wpisywania  $\prec$  potraktujemy jako strzałkę  $\leftarrow$  to ciąg rozbić  $\langle \mathcal{B}_n \rangle_{n < \omega}$  wyznacza granicę odwrotną opisującą zbiór Cantora tylko nieznacznie inaczej niż poprzednio, gdy zaczynaliśmy od ciągu odwrotnego, którego granicą był zbiór homeomorficzny z domkniętym podzbiorem zbioru

Cantora. Jeśli w naszych rozważaniach będziemy korzystali z takiej formy reprezentowania zbioru Cantora, to będziemy stosowali zapis  $\varprojlim\{\mathcal{B}_n, \prec\} = 2^\omega$ . Wówczas, zgodnie z własnościami ciągu odwrotnego, nici są wyznaczone przez przekroje

$$\bigcap\{U: x \in U \in \mathcal{B}_n \text{ oraz } n < \omega\} \text{ dla } x \in 2^\omega,$$

zaś rzutowania  $\pi_n: 2^\omega \rightarrow \mathcal{B}_n$  przez warunek:

$$\text{jeśli } x \in U \in \mathcal{B}_n, \text{ to } \pi_n x = U.$$

Teraz omówimy niektóre szczegóły wyjaśniające taki sposób reprezentowania zbioru Cantora. Opiszemy również jakie znaczenie ma to, że zbiór Cantora jest w sobie gęsty.

**Fakt 8.** *Jeśli  $\langle U_n \rangle_{n < \omega}$  jest takim łańcuchem podzbiorów zbioru Cantora, że stale  $U_n \in \mathcal{B}_n$ , to przekrój  $\bigcap_{n < \omega} U_n$  ma dokładnie jeden element.*

*Dowód.* Ustalmy łańcuch  $\langle U_n \rangle_{n < \omega}$  taki jak w założeniach. Przekrój  $\bigcap_{n < \omega} U_n$  jest niepusty, gdyż zbiory  $U_n$  tworzą zstępujący ciąg niepustych podzbiorów zwartych. Przypuśćmy, że przekrój ten zawiera co najmniej dwa różne elementy  $x$  oraz  $y$ . Suma rodzin  $\mathcal{B}_n$  jest bazą, a więc dobieramy  $n$  oraz  $U \in \mathcal{B}_n$  tak, aby  $x \in U$  oraz  $y \notin U$ . Rodzina  $\mathcal{B}_n$  składa się ze zbiorów parami rozłącznych, a więc  $U = U_n$ . Zatem  $y \notin \bigcap_{n < \omega} U_n$ , czyli sprzeczność.  $\square$

Dla każdego  $n < \omega$  istnieje dokładnie jedna funkcja  $\pi_n: 2^\omega \rightarrow \mathcal{B}_n$  przyporządkowująca punktowi jego otoczenie, tzn.  $x \in \pi_n x$  dla  $x \in 2^\omega$ . Podział  $\mathcal{B}_n$  jest zbiorem wszystkich warstw funkcji  $\pi_n$ , a ponieważ warstwy te są domknięto-otwarte, więc funkcja  $\pi_n$  jest ciągła. Jeżeli  $m \leq n$ , to istnieje dokładnie jedna funkcja  $\pi_m^n: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_m$  przyporządkowująca podzbiorowi jego nadzbiór, tzn.  $U \subset \pi_m^n U$  dla  $U \in \mathcal{B}_n$ . Innymi słowy, otrzymujemy diagram

$$\mathcal{B}_0 \xleftarrow{\pi_0^1} \mathcal{B}_1 \xleftarrow{\pi_1^2} \mathcal{B}_2 \longleftarrow \dots,$$

dla którego  $2^\omega = \varprojlim\{\mathcal{B}_n, \pi_m^n\}$ , gdyż punktowi  $x \in 2^\omega$  wzajemnie jednoznacznie odpowiada taki łańcuch  $\langle U_n \rangle_{n < \omega}$ , że  $\{x\} = \bigcap_{n < \omega} U_n$ , gdzie stale  $U_n \in \mathcal{B}_n$ . Rodzina  $\langle \pi_n: 2^\omega \rightarrow \mathcal{B}_n \rangle_{n < \omega}$  wyznacza stożek nad tym diagramem.

**Fakt 9.** *Dla dowolnego podzbioru domkniętego  $A \subset 2^\omega$  oraz jego rozbicia  $\mathcal{R}$  na podzbiory domknięto-otwarte relatywnie  $A$  istnieje takie  $n$ , że rodzina  $\{V \cap A: V \in \mathcal{B}_n\}$  jest wpisana w  $\mathcal{R}$ .*

*Dowód.* Ustalamy podzbiór domknięty  $A \subset 2^\omega$  oraz jego rozbitcie  $\mathcal{R} \subset \text{CO}(A)$ , które z powodu zwartości  $A$  jest skończone. Jeżeli  $R \in \mathcal{R}$ , to istnieje taki podzbiór otwarty  $U \subset 2^\omega$ , że  $R = U \cap A$ . Jeżeli  $x \in R$ , to istnieje takie  $n_x$  oraz  $V_x \in \mathcal{B}_{n_x}$ , że  $x \in V_x \subset U$ . Skoro zbiór  $R$  jest zwarty, to  $R \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$ . Niech

$$n_R = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\} \text{ oraz } n = \max\{n_R : R \in \mathcal{R}\}.$$

Ustalmy taki zbiór otwarty  $V \in \mathcal{B}_n$ , że  $V \cap A \neq \emptyset$ . Następnie ustalmy takie  $R \in \mathcal{R}$ , że  $V \cap A \cap R \neq \emptyset$  oraz takie  $x \in R$ , że  $V \cap A \cap V_x \neq \emptyset$ . Skoro  $V_x \in \mathcal{B}_{n_x}$  oraz  $n_x \leq n_R \leq n$ , to rozbitcie  $\mathcal{B}_n$  jest wpisane w rozbitcie  $\mathcal{B}_{n_x}$ , a więc  $V \subset V_x$ . Zatem

$$V \cap A \subset V_x \cap A \subset U \cap A = R.$$

□

Zbiór Cantora jest przestrzenią w sobie gęstą, a więc jeśli  $U \in \mathcal{B}_m$ , to istnieje takie  $n \geq m$ , że rodzina

$$\{V \in \mathcal{B}_n : V \subset U\}$$

ma dowolnie dużo elementów, tj. co najmniej  $k$  elementów, dla dowolnej liczby  $k < \omega$ . Istotnie, ustalmy  $U \in \mathcal{B}_m$  oraz  $k < \omega$ . Podzbiór  $U$  jest w sobie gęsty, a więc jest nieskończony. Należy do niego  $k$  różnych punktów, niech to będą punkty  $x_1, \dots, x_k$ . Dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  ustalmy  $n_i \geq m$  oraz otoczenie  $V_i \in \mathcal{B}_{n_i}$  punktu  $x_i$  rozłączne ze zbiorem  $\{x_1, \dots, x_k\} \setminus \{x_i\}$ . Kładziemy

$$n = \max\{n_i : 1 \leq i \leq k\}.$$

Jeśli  $W_i \in \mathcal{B}_n$  jest otoczeniem punktu  $x_i$ , to  $n_i \leq n$  pociąga  $W_i \subset V_i$ , a więc otoczenie  $W_i$  również jest rozłączne ze zbiorem  $\{x_1, \dots, x_k\} \setminus \{x_i\}$ . Zatem zbiory  $W_1, \dots, W_k \in \mathcal{B}_n$  są różne oraz wszystkie są zawarte w  $U$ , bo  $\mathcal{B}_n \succ \mathcal{B}_m$ .

W kolejnym fakcie charakteryzujemy podzbiory nigdziegęste.

**Fakt 10.** *Podzbiór  $A \subset 2^\omega$  jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej  $m$  oraz dowolnego zbioru  $U \in \mathcal{B}_m$  istnieje  $n \geq m$  oraz  $V \in \mathcal{B}_n$  takie, że  $V \subset U \setminus A$ .*

*Dowód.* Ustalmy niepusty podzbiór nigdziegęsty  $A \subset 2^\omega$  oraz  $U \in \mathcal{B}_m$ . Zbiór  $U \setminus \text{cl } A$  jest otwarty i niepusty, a więc zawiera podzbiór bazowy  $V \in \mathcal{B}_n$ . Skoro  $V \subset U \setminus \text{cl } A$ , to  $\mathcal{B}_n \succ \mathcal{B}_m$ , czyli  $n \geq m$ . Implikacja odwrotna wynika z założenia, że suma rodzin  $\mathcal{B}_n$  jest bazą. □

**Wniosek 11.** *Jeśli  $k < \omega$  oraz podzbiór  $A \subset 2^\omega$  jest nigdziegęsty, to dla dowolnego  $U \in \mathcal{B}_m$  istnieje  $n \geq m$  takie, że rodzina  $\{V \in \mathcal{B}_n : V \subset U \setminus A\}$  ma co najmniej  $k$  elementów.*  $\square$

### 3.2 Przedłużanie odwzorowań między podzbiórmi zbioru Cantora

Badanie przedłużeń odwzorowań pomiędzy podzbiórmi nigdziegęstymi zbioru Cantora zostało zainicjowane w pracy Knastera i Reichbacha [19]; porównaj twierdzenie 12 poniżej. W omówieniu MR0061817 (15,889b) opublikowanym w MathSciNet A. H. Stone napisał: *There are some minor slips and misprints, a few of which may cause trouble on a first reading.* To omówienie, a także praca [19], powstały prawie równolegle z początkami rozwoju teorii kategorii.

**Twierdzenie 12** (Knastera–Reichbacha [19]). *Każdy homeomorfizm pomiędzy podzbiórmi domkniętymi nigdziegęstymi zbioru Cantora ma przedłużenie do homeomorfizmu całej przestrzeni.*

Pokażemy, że to twierdzenie można ściśle powiązać ze sposobami reprezentowania zbioru Cantora jako granicy ciągu odwrotnego, gdzie wpisywanie pokryć  $\prec$  jest interpretowane jako  $\leftarrow$ . Niech

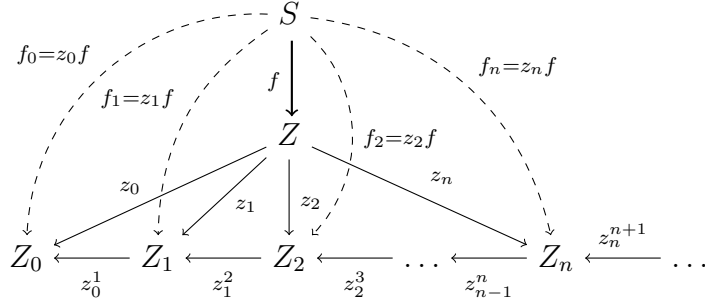
$$S = \varprojlim \{S_n, s_m^n, s_n\},$$

gdzie zbiory  $S_n$  są skończone,  $s_m^n : S_n \rightarrow S_m$  są surjekcjami oraz  $s_n : S \rightarrow S_n$  są rzutowaniami. Wtedy zbiory  $S_n$  można interpretować jako (skończone) rozbięcia na podzbiory domknięto-otwarte granicy  $S$ , zaś surjekcje  $s_m^n : S_n \rightarrow S_m$  interpretujemy jako wpisywanie rozbić. Czyli rzutowanie  $s_n : S \rightarrow S_n$  wyznacza naturalną odpowiedniość między  $S_n$  a rodziną  $\{s_n^{-1}[\{v\}] : v \in S_n\}$ , która jest rozbięciem zbioru  $S$  na zbiory domknięto-otwarte. Taka interpretacja pozwala jaśniej uchwycić sposób reprezentowania homeomorfizmu określonego na zbiorze Cantora, co przedstawiamy poniżej.

Założmy, że mamy homeomorfizm  $f : S \rightarrow Z$ , gdzie

$$S = \varprojlim \{S_n, s_m^n, s_n\} \text{ oraz } Z = \varprojlim \{Z_n, z_m^n, z_n\}$$

są homeomorficzne ze zbiorem Cantora (domkniętym podzbiorem zbioru Cantora). Kładąc  $f_n = z_n f$ , dostajemy surjekcję  $f_n : S \rightarrow Z_n$ , a więc mamy diagram jak poniżej.



Niech

$$\mathcal{F}_n = \{f_n^{-1}[\{v\}]: v \in Z_n\} = \{f^{-1}[z_n^{-1}[\{v\}]]: v \in Z_n\},$$

czyli dowolne  $\mathcal{F}_n$  jest rozbiem zbioru  $S$  na zbiory domknięto-otwarte, ponieważ  $f_n^{-1}[\{v\}] = f^{-1}[z_n^{-1}[\{v\}]]$ , o ile  $v \in Z_n$ .

**Fakt 13.** *Zachodzi  $\mathcal{F}_0 \prec \mathcal{F}_1 \prec \dots \prec \mathcal{F}_n \prec \dots$  a więc  $\mathcal{F}_m \prec \mathcal{F}_n$ , o ile  $m \leq n$ .*

*Dowód.* Jeśli  $n \geq m \geq 0$ , to  $f_m = z_m^n f_n$ . Dostajemy

$$f_n^{-1}[\{v\}] \subset f_m^{-1}[\{z_m^n v\}]$$

dla dowolnego  $v \in Z_n$ . □

Zauważmy, że powyższy fakt wynika także z własności, którą komentujemy przed faktem 1. W kolejnym fakcie zbiór skończony  $S_n$  utożsamiamy z rodziną  $\{s_n^{-1}[\{u\}]: u \in S_n\}$ , która jest rozbiem zbioru  $S$  na zbiory domknięto-otwarte.

**Fakt 14.** *Dla dowolnego  $n < \omega$  istnieje  $k_n < \omega$  takie, że  $\mathcal{F}_n \prec S_{k_n}$ .*

*Dowód.* Zbiór Cantora jest zwarty, a więc dla dowolnego  $w \in \mathcal{F}_n$  istnieje liczba naturalna  $k_w$  taka, że zbiór  $w$  jest sumą skończenie wielu zbiorów postaci  $s_k^{-1}[\{u\}]$ , gdzie  $u \in S_k$  oraz  $k \leq k_w$ . Także rodzina  $\mathcal{F}_n$  jest skończona, będąc rozbiem  $S$  na zbiory domknięto-otwarte. Czyli dowolne  $k_n \geq k_w$ , gdzie  $w \in \mathcal{F}_n$ , jest takie jakiego potrzebujemy. □

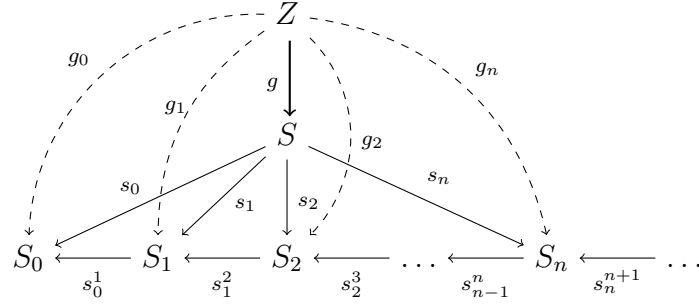
Bez straty ogólności możemy założyć, że  $k_n < k_{n+1}$ .

Teraz, aby zyskać na przejrzystości zapisu, kładziemy

$$f^{-1} = g \text{ oraz } g_n = s_n g = s_n f^{-1}.$$

Dostajemy następujący diagram, gdzie wszystkie strzałki są surjekcjami.





Jeżeli położymy

$$\mathcal{G}_n = \{g_n^{-1}[\{u\}]: u \in S_n\} = \{g^{-1}[s_n^{-1}[\{u\}]]: u \in S_n\},$$

to dostajemy skończone rodziny  $\mathcal{G}_n$ , które są rozbiciami  $Z$  na zbiory domknięto-otwarte. Analogicznie jak w faktach 13 oraz 14 dostajemy, co następuje.

**Fakt 15.** *Jeśli  $m \leq n$ , to  $\mathcal{G}_m \prec \mathcal{G}_n$ . Dla dowolnego  $n < \omega$  istnieje  $l_n < \omega$  takie, że  $\mathcal{G}_n \prec Z_{l_n}$ .  $\square$*

Zgodnie z definicją rodzin  $\mathcal{F}_n$  oraz  $\mathcal{G}_n$  mamy następujące diagramy, gdzie symbol  $\leftrightarrow$  oznacza bijekcję, zaś strzałka  $\leftarrow$  wpisywanie pokryć  $\prec$ , o ile zbiory  $S_n$  utożsamiamy z rozbiciami  $\{s_n^{-1}[\{a\}]: a \in S_n\}$ , złożonymi ze zbiorów domknięto-otwartych w  $S$ . Bijeccje  $r_n: \mathcal{G}_n \rightarrow S_n$ , w skrócie zapisujemy je  $\mathcal{G}_n \leftrightarrow S_n$ , są wyznaczone przez homeomorfizm  $g: Z \rightarrow S$ , a więc  $r_n a = g[a]$  dla dowolnego  $a \in \mathcal{G}_n$ . Wobec symetrii założeń, mamy także i to, że bijeccje  $p_n: \mathcal{F}_n \rightarrow Z_n$ , w skrócie zapisujemy je  $\mathcal{F}_n \leftrightarrow Z_n$ , są wyznaczone przez homeomorfizm  $f: S \rightarrow Z$ , a więc  $p_n b = f[b]$  dla dowolnego  $b \in \mathcal{F}_n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} S_0 & \leftarrow & S_1 & \leftarrow & S_2 & \leftarrow & S_3 & \leftarrow & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \mathcal{G}_0 & \leftarrow & \mathcal{G}_1 & \leftarrow & \mathcal{G}_2 & \leftarrow & \mathcal{G}_3 & \leftarrow & \dots \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{ccccccc} Z_0 & \leftarrow & Z_1 & \leftarrow & Z_2 & \leftarrow & Z_3 & \leftarrow & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \mathcal{F}_0 & \leftarrow & \mathcal{F}_1 & \leftarrow & \mathcal{F}_2 & \leftarrow & \mathcal{F}_3 & \leftarrow & \dots \end{array}$$

**Lemat 16.** *Jeśli  $n < \omega$ , to  $S_n \prec \mathcal{F}_{l_n}$ , a także  $Z_n \prec \mathcal{G}_{k_n}$ .*

*Dowód.* Ustalamy zbiór  $a \in \mathcal{F}_{l_n}$ , a więc  $p_{l_n} a = f[a] \in Z_{l_n}$ . Następnie, na podstawie faktu 15, dobieramy  $b \in \mathcal{G}_n$  tak, aby  $f[a] \subset b$ . Dostajemy

$$a \subset f^{-1}[b] = r_n b \in S_n.$$

Analogicznie dowodzimy, że  $Z_n \prec \mathcal{G}_{k_n}$ .  $\square$

Ustalając ciągi  $\langle k_n \rangle_{n < \omega}$  oraz  $\langle l_n \rangle_{n < \omega}$ , o których mowa w faktach 14 oraz 15, dla potrzeb kolejnego lematu kładziemy

$$i_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n = 0; \\ l_{i_{n-1}}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste;} \\ k_{i_{n-1}}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

**Wniosek 17.** *Następujący diagram*

$$\begin{array}{ccccccc} S_0 & \longleftarrow & \mathcal{F}_{i_1} & \longleftarrow & S_{i_2} & \longleftarrow & \mathcal{F}_{i_3} \longleftarrow \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{G}_0 & \longleftarrow & Z_{i_1} & \longleftarrow & \mathcal{G}_{i_2} & \longleftarrow & Z_{i_3} \longleftarrow \dots \end{array}$$

*jest przemienny.*

*Dowód.* Wobec faktu 15 oraz lematu 16 diagramy

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \longleftarrow & \mathcal{F}_{i_1} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{G}_0 & \longleftarrow & Z_{i_1} \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{ccc} S_{i_j} & \longleftarrow & \mathcal{F}_{i_{j+1}} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{G}_{i_j} & \longleftarrow & Z_{i_{j+1}} \end{array}$$

są przemiennie, o ile  $j$  jest parzyste, ponieważ wtedy  $i_1 = l_0$  oraz  $i_{j+1} = l_{i_j}$ .

Zaś gdy  $j$  jest nieparzyste, to  $i_{j+1} = k_{i_j}$ , a więc z faktu 14 oraz lematu 16 dostajemy, że diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{i_j} & \longleftarrow & S_{i_{j+1}} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ Z_{i_j} & \longleftarrow & \mathcal{G}_{i_{j+1}} \end{array}$$

jest przemienny. Sprawdzenie przemienności reszty diagramu, polega na zastosowaniu zasady indukcji.  $\square$

Scharakteryzujemy dowolny homeomorfizm  $f: X \rightarrow Y$ , gdzie przestrzenie  $X$  oraz  $Y$  są metryczne zerowymiarowe oraz zwarte. Zbliżoną charakteryzację można znaleźć w artykule J. Pollard [37]. Nasza argumentacja będzie polegała na dopełnianiu stosownego diagramu do diagramu przemiennego, który zawiera pełną informację o badanym homeomorfizmie. Mianowicie, wobec

twierdzenia 10 z książki [9, str. 439] podprzestrzenie  $X$  oraz  $Y$  są homeomorficzne z domkniętymi podzbiórami zbioru Cantora, a więc możemy przyjąć, że

$$X = \varprojlim \{S_n, s_m^n\} \text{ oraz } Y = \varprojlim \{Z_n, z_m^n\},$$

gdzie zbiory  $S_n$  oraz  $Z_n$  są skończone, zaś  $s_m^n: S_n \rightarrow S_m$  oraz  $z_m^n: Z_n \rightarrow Z_m$  to surjekcje.

**Lemat 18.** *Załóżmy, że diagram (3) jest przemienny,  $Z/g \succ Z/f$ , funkcje  $f', g'$  są surjekcjami oraz dla każdego  $w \in W$ , zbiór  $(f')^{-1}[\{w\}] \setminus g[Z]$  jest mocy nie mniejszej niż  $(g')^{-1}[\{w\}]$ . Wtedy istnieje taka surjekcja  $h: Y \rightarrow X$ , że  $hg = f$  oraz  $g'h = f'$ .*

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{f'} & Y \\ g' \uparrow & & \uparrow g \\ X & \xleftarrow{f} & Z \end{array}$$

*Dowód.* Dla każdego  $w \in W$ , niech  $h_w: (f')^{-1}[\{w\}] \setminus g[Z] \rightarrow (g')^{-1}[\{w\}]$  będzie surjekcją. Niech  $\phi: g[Z] \rightarrow Z$  będzie dowolną funkcją spełniającą równość  $g\phi = \text{id}_{g[Z]}$ . Funkcję  $h: Y \rightarrow X$  definiujemy wzorem

$$hy = \begin{cases} f\phi y, & \text{gdy } y \in g[Z], \\ h_{f'y}y, & \text{gdy } y \notin g[Z]. \end{cases}$$

Ustalmy  $x \in X$ . Wtedy  $g'x \in W$ , a więc istnieje takie  $y \in (f')^{-1}[\{g'x\}] \setminus g[Z]$ , że  $h_{g'x}y = x$ . Stąd  $hy = h_{f'y}y = h_{g'x}y = x$ , a więc funkcja  $h$  jest surjekcją.

Ustalmy  $z \in Z$ . Wtedy  $g\phi z = gz$ , a więc  $\phi z \in z/g$ , a skoro  $Z/g \succ Z/f$ , to  $fz = f\phi z = hg z$ , co uzasadnia równość  $f = hg$ .

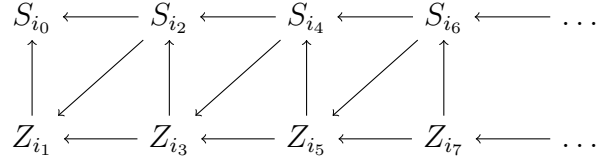
Ustalmy  $y \in Y$ . Jeśli  $y \in g[Z]$ , to  $g'hy = g'f\phi y = f'g\phi y = f'y$ . Jeśli  $z \notin g[Z]$ , to  $g'hy = g'h_{f'y}y = f'y$ .  $\square$

**Stwierdzenie 19.** *Niech  $X = \varprojlim \{S_n, s_m^n\}$  oraz  $Y = \varprojlim \{Z_n, z_m^n\}$  będą przestrzeniami metrycznymi zerowymiarowymi oraz zwartymi. Są one homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych  $\langle i_n \rangle_{n < \omega}$  taki, że diagram*

$$S_{i_0} \longleftarrow S_{i_2} \longleftarrow S_{i_4} \longleftarrow S_{i_6} \longleftarrow \dots$$

$$Z_{i_1} \longleftarrow Z_{i_3} \longleftarrow Z_{i_5} \longleftarrow Z_{i_7} \longleftarrow \dots$$

można dopełnić do diagramu przemennego



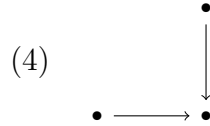
gdzie wszystkie strzałki są surjekcjami.

*Dowód.* Gdy  $f: X \rightarrow Y$  jest homeomorfizmem, to stosowne dopełnienie dostajemy przy pomocy wniosku 17. Z drugiej strony, jeśli  $h_n: S_{i_{2n}} \rightarrow Z_{i_{2n-1}}$  jest strzałką z dopełnionego diagramu, tzn. jest surjekcją  $S_{i_{2n}} \rightarrow Z_{i_{2n-1}}$ , to punktowi

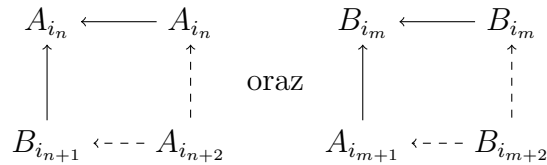
$$x \in \{x\} = \bigcap \{V \in \bigcup_{n < \omega} S_{i_{2n}} : x \in V\}$$

przyporządkowujemy  $fx = \bigcap_{n > 0} h_n[V_n]$ . Interpretacja rodzin  $S_n$  jako rozbić  $X$  na zbiory domknięto-otwarte oraz rodzin  $Z_n$  jako rozbić  $Y$  na zbiory domknięto-otwarte pozwala natychmiast sprawdzić, że  $f$  jest homeomorfizmem, którego potrzebujemy. Istotnie, wtedy rodzina  $\bigcup_{n < \omega} S_{i_{2n}}$  jest bazą dla  $X$ , rodzina  $\bigcup_{n > 0} Z_{i_{2n-1}}$  jest bazą dla  $Y$  oraz bijekcja  $f$  przeprowadza zbiory bazowe przestrzeni  $X$  na zbiory bazowe przestrzeni  $Y$ .  $\square$

Przypominamy, że w języku teorii kategorii *własność amalgamacji odwrotnej* oznacza, że każdy diagram postaci (4) ma stożek nad sobą.



W poniższym dowodzie twierdzenia Knastera–Reichbacha będziemy definiowali ciąg rosnący  $\langle i_n \rangle_{n < \omega}$  tak, aby zachodziły amalgamacje odwrotne jak na następującym rysunku, gdzie  $\leftarrow$  to zadane strzałki diagramów, a strzałki  $\leftarrow - -$  to strzałki należące do stożków.



Niech ciągi

$$\langle S_n \rangle_{n < \omega}, \langle Z_n \rangle_{n < \omega}, \langle A_n \rangle_{n < \omega}, \text{ oraz } \langle B_n \rangle_{n < \omega},$$

których wyrazy to zbiory skończone, będą takie, że  $S_n \subset A_n$  oraz  $Z_n \subset B_n$  dla każdego  $n < \omega$ . Rozważmy granice odwrotne:

$$S = \varprojlim \{S_n, s_m^n\}, Z = \varprojlim \{Z_n, z_m^n\}, X = \varprojlim \{A_n, a_m^n\} \text{ oraz } Y = \varprojlim \{B_n, b_m^n\},$$

gdzie

$$s_m^n: S_n \rightarrow S_m, z_m^n: Z_n \rightarrow Z_m, a_m^n: A_n \rightarrow A_m \text{ oraz } b_m^n: B_n \rightarrow B_m$$

to surjekcje. Załóżmy dodatkowo,  $f: S \rightarrow Z$  jest homeomorfizmem, który jest zdeterminowany, na podstawie stwierdzenia 19, surjekcjami (strzałkami)  $S_n \rightarrow Z_n$  oraz  $S_m \rightarrow Z_m$  na następującym diagramie przemiennym.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & A_2 & \longleftarrow & A_3 & \longleftarrow & A_4 & \longleftarrow & \dots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ S_0 & \longleftarrow & S_1 & \longleftarrow & S_2 & \longleftarrow & S_3 & \longleftarrow & S_4 & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\ Z_0 & \longleftarrow & Z_1 & \longleftarrow & Z_2 & \longleftarrow & Z_3 & \longleftarrow & Z_4 & \longleftarrow & \dots \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ B_0 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & B_2 & \longleftarrow & B_3 & \longleftarrow & B_4 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Aby otrzymać dowód twierdzenia Knastera–Reichbacha wystarczy dobrać rosnący ciąg liczb naturalnych  $\langle i_n \rangle_{n < \omega}$  oraz dopełnić powyższy diagram do diagramu przemiennego surjekcjami

$$A_{i_{2k}} \rightarrow B_{i_{2k-1}} \text{ oraz } B_{i_{2k+1}} \rightarrow A_{i_{2k}},$$

które na podstawie stwierdzenia 19, zdeterminują rozszerzenie homeomorfizmu  $f: S \rightarrow Z$  do homeomorfizmu między  $X$  a  $Y$ . Możemy tego dokonać następującą procedurą.

Kładziemy  $i_0 = 0$ , a następnie znajdujemy  $i_1 > i_0$  takie, aby zbiór  $B_{i_1} \setminus Z_{i_1}$  miał co najmniej tyle samo elementów co  $A_0 \setminus S_0$ . Wtedy dowolna surjekcja  $(B_{i_1} \setminus Z_{i_1}) \rightarrow (A_0 \setminus S_0)$  zsumowana z surjekcją  $Z_{i_1} \rightarrow S_0$ , która jest zdeterminowana przez diagram, da strzałkę  $B_{i_1} \rightarrow A_0$ . Taka surjekcja wyznacza rozbiecie zbioru  $B_{i_1}$  na przeciwobrazy punktów z  $A_0$ , które możemy potraktować jako kolorowanie elementów  $B_{i_1}$  kolorami, które wzajemnie jednoznacznie odpowiadają elementom z  $A_0$ . Zauważmy, że relacja wpisywania

$\prec$  wyznacza także kolorowanie elementów dowolnego zbioru  $A_i$  elementami  $A_0$ , gdzie  $b \in A_i$  jest koloru  $a \in A_0$ , o ile  $b \subset a$ . Aby określić surjekcję  $A_{i_2} \rightarrow B_{i_1}$  to zbiór  $A_{i_2} \setminus S_{i_2}$  musi być na tyle duży aby dowolny element  $a \in A_{i_2}$  można było przeprowadzić na  $b \in B_{i_1}$ , zachowując jego kolor. Gdy  $X = \varprojlim \{A_n, a_m^n\}$  jest zbiorem Cantora, a  $S = \varprojlim \{S_n, s_m^n\}$  jego domkniętym i nigdziegęstym podzbiorem, to możliwość wyboru liczby  $i_2$ , a także stosownej surjekcji  $A_{i_2} \rightarrow B_{i_1}$ , gwarantuje wniosek 11. Dla dowodu indukcyjnego założymy, że liczby  $i_0, i_1, \dots, i_{2n}$  są określone oraz są także zdefiniowane surjekcje  $A_{i_{2k}} \rightarrow B_{i_{2k-1}}$ , gdzie  $0 < k \leq n$ , oraz surjekcje  $B_{i_{2k-1}} \rightarrow A_{i_{2k-2}}$ , gdzie  $0 < k \leq n$ .

Liczbę  $i_{2n+1}$  oraz surjekcję  $B_{i_{2n+1}} \rightarrow A_{2n}$ , które potrzebujemy, zdefiniujemy korzystając z zasady amalgamacji odwrotnej, o której wzmiankowaliśmy wyżej. Mianowicie, surjekcja  $A_{i_{2n}} \rightarrow B_{i_{2n-1}}$  wyznacza rozbięcie zbioru  $A_{i_{2n}}$  na przeciwobrazy punktów z  $B_{i_{2n-1}}$ , które możemy potraktować jako kolorowanie elementów  $A_{i_{2n}}$  kolorami, które wzajemnie jednoznacznie odpowiadają elementom z  $B_{i_{2n-1}}$ . Zaś wpisywanie  $\prec$  wyznacza kolorowanie dowolnego zbioru  $B_m$ , gdzie  $m > i_{2n-1}$ , elementami  $B_{i_{2n-1}}$  (gdzie  $b \in B_m$  jest koloru  $a \in B_{i_{2n-1}}$ , o ile  $b \subset a$ ). Aby określić potrzebną surjekcję  $B_{i_{2n+1}} \rightarrow A_{i_{2n}}$  zbiór  $B_{i_{2n+1}} \setminus Z_{i_{2n+1}}$  musi być na tyle duży aby dowolny element  $b \in B_{i_{2n+1}}$  można było przeprowadzić na  $a \in A_{i_{2n}}$ , zachowując jego kolor. Gdy  $Y = \varprojlim \{B_n, b_m^n\}$  jest zbiorem Cantora, a  $Z = \varprojlim \{Z_n, z_m^n\}$  jego domkniętym i nigdziegęstym podzbiorem, to możliwość wyboru liczby  $i_{2n+1}$ , a także stosownej surjekcji  $B_{i_{2n+1}} \rightarrow A_{i_{2n}}$ , gwarantuje wniosek 11. Analogicznie, korzystając z zasady amalgamacji odwrotnej, określamy liczbę  $i_{2n+2}$  oraz surjekcję  $A_{i_{2n+2}} \rightarrow B_{i_{2n+1}}$ . Na mocy zasady indukcji, zakończyliśmy kategorijski opis dowodu twierdzenia Knastera–Reichbacha, patrz twierdzenie 12.

### 3.3 Twierdzenie Knastera–Reichbacha dla przestrzeni metrycznych, rozproszonych oraz zwartych

W recenzji [42] napisano: *Secondly, if  $M, N$  are compact and have homeomorphic  $\alpha$ -th derived sets  $M^{(\alpha)}, N^{(\alpha)}$  (where  $\alpha$  is any countable ordinal), (...), then the homeomorphism between  $M^{(\alpha)}$  and  $N^{(\alpha)}$  can be extended to one between  $M$  and  $N$ . This generalizes the theorem of Mazurkiewicz and Sierpiński (...).* W artykule [19] uzasadnienie tego faktu przedstawione jest na stronach 189–193. W trakcie dyskusji o wynikach zawartych w pracy [36] — w której uczestniczyli autorzy tej pracy oraz W. Bielas — powstał inny dowód, który w zakresie przestrzeni rozproszonych omawiamy poniżej. Nie-

stety, ale dla potrzeb tego dowodu teoria kategorii wydaje się być balastem, niczego istotnego nie wnosi, a więc pomijamy wszelkie nawiązania do tej teorii.

Przestrzeń metryczna jest  $\sigma$ -dyskretna, o ile jest sumą przeliczalnie wielu swoich dyskretnych podprzestrzeni. W szczególności przestrzeń metryczna i przeliczalna jest  $\sigma$ -dyskretna.

**Lemat 20.** *Dowolna przestrzeń metryczna  $\sigma$ -dyskretna jest sumą przeliczalnie wielu podzbiorów domkniętych dyskretnych.*

*Dowód.* Ustalmy przestrzeń metryczną  $\sigma$ -dyskretną  $X$ . Niech  $X_0, X_1, \dots$  będą podprzestrzeniami dyskretnymi sumującymi się do przestrzeni  $X$ . Korzystając z twierdzenia Binga [9, str. 346], ustalmy bazę

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{B}_n$$

przestrzeni  $X$ , gdzie rodziny  $\mathcal{B}_n$  są rodzinami dyskretnymi.

Jeśli  $x \in X_k$ , to wybieramy (o ile istnieje) zbiór  $V_x^n \in \mathcal{B}_n$  taki, że

$$V_x^n \cap X_k = \{x\}.$$

Gdy taki wybór jest niemożliwy, to kładziemy  $V_x^n = \emptyset$ . Dalej kładziemy

$$X_{k,n} = X_k \cap \bigcup \{V_x^n : x \in X_k \text{ oraz } V_x^n \in \mathcal{B}_n\}.$$

Korzystając z dyskretności rodzin  $\mathcal{B}_n$  oraz aksjomatu oddzielania  $T_2$  sprawdzamy, że zbiory  $X_{k,n}$  są domknięte. Zbiory te dziedziczą topologię dyskretną oraz sumują się do przestrzeni  $X$ , co kończy dowód.  $\square$

Modyfikując rozumowanie 1.3.2 Engelkinga z [10] otrzymujemy następujący fakt.

**Fakt 21.** *Jeśli przestrzeń normalna jest sumą przeliczalnie wielu podprzestrzeni domkniętych dyskretnych, to ma bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych.*  $\square$

**Twierdzenie 22.** *W dowolne pokrycie otwarte przestrzeni metrycznej  $\sigma$ -dyskretniej można wpisać rozbiecie złożone ze zbiorów domknięto-otwartych.*

*Dowód.* Ustalmy przestrzeń metryczną  $X$  która jest  $\sigma$ -dyskretna, jej pokrycie otwarte  $\mathcal{P}$  oraz bazę  $\sigma$ -dyskretną  $\mathcal{B}$  taką jak w dowodzie lematu 20. Gdy zbiór  $X_{k,n}$  jest określony tak samo jak w dowodzie lematu 20, to rodzina

$$\{V_x^n : x \in X_{k,n}\} \subset \mathcal{B}_n$$

jest dyskretna. Następnie dla każdego punktu  $x \in X_{k,m}$  dobieramy, korzystając z faktu 21, zbiór domknięto-otwarty  $W_x^n \subset W \in \mathcal{P}$  taki, że  $x \in W_x^n \subset V_x^n$ . Dostajemy, że suma

$$\bigcup \{W_x^n : x \in X_{k,n}\} \supset X_{k,n},$$

jest zbiorem domknięto-otwartym oraz to, że rodzina  $\{W_x^m : x \in X_{k,m}\}$ , będąc rodziną dyskretną, składa się z parami rozłącznych zbiorów. Zbiory  $X_{k,n}$  numerujemy jako  $\{Y_m : m < \omega\}$ . Niech

$$\mathcal{W}_0 = \{W_x^n : x \in Y_0 = X_{k,n}\}.$$

Jeśli  $X_{k,n} = Y_m$  oraz rodziny  $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{m-1}$  zbiorów domknięto-otwartych są już zdefiniowane w taki sposób, że sumy  $\bigcup \mathcal{W}_0, \bigcup \mathcal{W}_1, \dots, \bigcup \mathcal{W}_{m-1}$  są zbiorami domknięto-otwartymi, to niech  $\mathcal{W}_m$  będzie taką rodziną, że

$$\{W_x^n \setminus \bigcup \{\bigcup \mathcal{W}_i : i < m\} : x \in Y_m = X_{k,n} \text{ oraz } x \notin \bigcup \{\bigcup \mathcal{W}_i : i < m\}\}.$$

Suma  $\bigcup \{\mathcal{W}_m : m < \omega\}$  jest żądanym rozbiciem  $\mathcal{P}$ . □

W przypadku gdy  $X$  jest nieskończoną oraz przeliczalną przestrzenią metryczną a  $\mathcal{P}$  jej otwartym pokryciem, to tezę powyższego twierdzenia można otrzymać następująco. Punkty przestrzeni  $X$  ustawiamy w ciąg różnowartościowy  $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ . Następnie dobieramy zbiór domknięto-otwarty  $V_0 \subset U \in \mathcal{P}$  tak, aby  $x_0 \in V_0$ . Gdy parami rozłączne zbiory domknięto-otwarte  $V_0, V_1, \dots, V_n$  są określone, to bierzemy pod uwagę wyraz

$$x_{k_n} \notin V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$$

z najmniejszym indeksem i dobieramy zbiór domknięto-otwarty

$$V_{n+1} \subset U \in \mathcal{P}$$

tak, aby  $x_{k_n} \in V_{n+1}$ . Rodzina zbiorów  $V_n$  tworzy potrzebne rozbiecie wpisane w  $\mathcal{P}$ .

Twierdzenie 22 zostało użyte w dowodzie twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego, a także w dowodach jego uogólnień. Kilka razy jest tam wykorzystana idea kogranicy, którą jest suma wstępująca rodziny zbiorów. Między innymi, taka idea dotyczyła arytmetyki (dodawania) liczb porządkowych. Przykładowo, jeśli  $\langle \lambda_n \rangle_{n < \omega}$  jest ciągiem liczb porządkowych, to

$$\sum_{n < \omega} \lambda_n = \sup \{ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n : n < \omega \}.$$

**Twierdzenie Mazurkiewicza–Sierpińskiego.** *Jeśli  $X$  jest przestrzenią metryczną, przeliczalną oraz zwartą, to  $X$  jest homeomorficzna z liczbą porządkową  $\omega^\alpha n + 1$ , gdzie  $\alpha < \omega_1$  oraz pochodna  $X^{(\alpha)}$  jest mocy  $n$ .*



*Dowód.* Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną, przeliczalną oraz zwartą. Jeśli pierwsza pochodna  $X^{(1)}$  jest pusta, to  $X$  jest przestrzenią skończoną. Wtedy  $X$  jest homeomorficzna z liczbą porządkową

$$\omega^0 \cdot |X| = 1 \cdot |X|.$$

Jeśli  $|X^{(1)}| = n$ , gdzie  $n > 0$ , to przestrzeń  $X$  jest sumą  $n$  kopii ciągu zbieżnego, więc jest homeomorficzna z liczbą porządkową  $\omega \cdot n + 1$ . Załóżmy indukcyjnie, że jeśli *ranga Cantora–Bendixsona* przestrzeni  $X$  nie jest większy niż  $\alpha$ , to  $X$  jest homeomorficzna z liczbą porządkową  $\omega^\beta \cdot n + 1$ , gdzie  $\beta < \alpha$  oraz  $n < \omega$ .<sup>1</sup> Jeśli  $|X^{(\alpha)}| = 1$ , to wobec twierdzenia 22 różnica  $X \setminus X^{(\alpha)}$  jest nieskończoną sumą parami rozłącznych zbiorów domknięto-otwartych o których wiemy, że każdy ma  $\alpha$ -tą pochodną pustą. Na mocy założenia indukcyjnego, podprzestrzeń  $X \setminus X^{(\alpha)}$  jest homeomorficzna z liczbą porządkową

$$(\omega^{\beta_0} \cdot n_0 + 1) \oplus (\omega^{\beta_1} \cdot n_1 + 1) \oplus \dots$$

Jeśli  $\alpha = \gamma + 1$ , to można założyć, że  $\beta_n = \gamma$  dla  $n < \omega$ . Gdy  $\alpha$  jest graniczną liczbą porządkową, to zawsze  $\beta_n < \alpha$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \alpha$ . W obu przypadkach dostajemy, że przestrzeń  $X$  jest homeomorficzna z  $\omega^\alpha + 1$ .

Jeśli  $|X^{(\alpha)}| = n > 0$ , to przestrzeń  $X$  ma skończone pokrycie otwarte  $\mathcal{P}$  takie, że każdy zbiór  $V \in \mathcal{P}$  przecina pochodną  $X^{(\alpha)}$  tylko w jednym punkcie oraz elementy pokrycia  $\mathcal{P}$  są parami rozłączne. Zatem przestrzeń  $X$  jest homeomorficzna z sumą  $(\omega^\alpha + 1)$  wziętą  $n$ -razy, a więc jest homeomorficzna z liczbą porządkową  $\omega^\alpha \cdot n + 1$ .  $\square$

Założmy, że  $M$  oraz  $N$  to przestrzenie metryczne, przeliczalne oraz zwarte, których  $\alpha$ -te pochodne są skończone. Jeśli te pochodne są niepuste oraz homeomorficzne, to obie są  $n$ -punktowe, gdzie  $n > 0$ . Wtedy, na podstawie twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego, obie przestrzenie są sumą topologiczną złożoną z  $n$  kopii liczby porządkowej  $\omega^\alpha + 1$ . Każda z tych kopii ma dokładnie jeden punkt w swojej  $\alpha$ -tej pochodnej, a więc dowolna bijekcja pomiędzy  $M^{(\alpha)}$  oraz  $N^{(\alpha)}$  w sposób naturalny — polegający na rozszerzeniu odpowiedniości pomiędzy punktami z  $\alpha$ -tych pochodnych do homeomorfizmów pomiędzy kopiami  $\omega^\alpha + 1$ , w których te punkty leżą — przedłuża się do homeomorfizmu pomiędzy  $M$  oraz  $N$ .

Założmy teraz, że  $M$  oraz  $N$  to przestrzenie metryczne, przeliczalne oraz zwarte takie, że pochodne  $M^{(\alpha)}$  oraz  $N^{(\alpha)}$  są nieskończone oraz nigdziegęste,

---

<sup>1</sup>*Ranga Cantora–Bendixsona* przestrzeni  $X$  to najmniejsza liczba porządkowa  $\alpha$  taka, że  $X^{(\alpha)} = \emptyset$ .

odpowiednio  $M^{(\alpha)}$  w  $M$  oraz  $N^{(\alpha)}$  w  $N$ . Jeśli

$$f: M^{(\alpha)} \rightarrow N^{(\alpha)}$$

jest homeomorfizmem, to obcięcie  $f$  do zbioru  $M^{(\alpha)} \setminus M^{(\alpha+1)}$  jest bijekcją na  $N^{(\alpha)} \setminus N^{(\alpha+1)}$ , ponieważ homeomorfizm przeprowadza punkty izolowane na punkty izolowane. Podprzestrzeń  $M \setminus M^{(\alpha+1)}$  można przedstawić jako sumę parami rozłącznych podzbiorów domknięto-otwartych, z których każdy przecina  $M^{(\alpha)}$  w co najwyżej jednym punkcie. Bez straty ogólności, możemy założyć, że istnieje rozbitcie podprzestrzeni  $M \setminus M^{(\alpha+1)}$  na przeliczalnie wiele zbiorów domknięto-otwartych  $\{A_n: n < \omega\}$ , z których każdy ma dokładnie jeden punkt wspólny z  $M^{(\alpha)}$ . Wobec twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego,  $M \setminus M^{(\alpha+1)}$  jest sumą przeliczalnie wielu kopii  $\omega^\alpha + 1$ , tzn. możemy zakładać, że każdy zbiór  $A_n$  jest homeomorficzny z  $\omega^\alpha + 1$ . To samo dotyczy  $N \setminus N^{(\alpha+1)}$ , czyli podprzestrzeni  $N \setminus N^{(\alpha+1)}$  ma rozbitcie na przeliczalnie wiele kopii  $\omega^\alpha + 1$ , które oznaczamy  $\{B_n: n < \omega\}$ , przy czym zakładamy, że  $\{q_n\} = A_n^{(\alpha)}$  oraz  $\{fq_n\} = B_n^{(\alpha)}$ . Homeomorfizm  $f: M^{(\alpha)} \rightarrow N^{(\alpha)}$  przedłużamy, dodając „identyczności” między  $A_n$  oraz  $B_n$ , dla  $n < \omega$ . Sprawdzenie ciągłości tego rozszerzenia pomijamy, gdyż polega ono na zastosowaniu definicji ciągłości Heinego oraz kilkakrotnym użyciu elementarnych własności liczb porządkowych.

## 4 Kilka uwag o Cantorvalach

Według MathSciNet słowo „Cantorval” pojawia się po raz pierwszy w artykule [28]. Jednakże przykład podzbioru liczb rzeczywistych, który jest Cantorvalem opisano już w artykule [14, Theorem 1]. Gdy zaczynałam zbierać materiały do tej rozprawy, to Promotor zasugerował mi, że pojęcie Cantorvala pojawiło się w literaturze stosunkowo późno, a więc jest to obiekt o którym będzie można wiele jeszcze powiedzieć, wykorzystując między innymi język teorii kategorii. Zagłębienie się w tematykę omawianą m.in. w artykule [32] zaowocowało zamieszczeniem w arXiv.math artykułu [6], w którym koncentrujemy się na aspektach geometrycznych Cantorvala.

### 4.1 Cantorval symetryczny

Zgodnie z artykułem [28], porównaj [32, str. 868], *Cantorval symetryczny* to podzbiór zwarty  $S$  liczb rzeczywistych o następujących własnościach.

- (S1)  $S$  jest regularnie domknięty.
- (S2) Punkty końcowe składowych nietrywialnych zbioru  $S$  są punktami skupienia składowych trywialnych.

Zbiór *regularnie domknięty* jest domknięciem swojego wnętrza. Składowa nietrywialna dowolnego podzbioru liczb rzeczywistych jest przedziałem (odcinkiem), a więc punkty końcowe takiej składowej to końce przedziału. *Składowa punktu*  $x \in S$  to suma wszystkich podzbiorów spójnych zawartych w  $S$  oraz zawierających  $x$ , patrz [9, str. 430], a więc *składowa trywialna* to podzbiór jednopunktowy.

Cantorval pojawia się, gdy rozważamy wszystkie podsumy szeregu bezwzględnie zbieżnego  $\sum x_n$ . Wtedy zbiór

$$\left\{ \sum_{n \in A} x_n : A \subset \omega \right\}$$

bywa nazywany *zbiorem podsum* tego szeregu. Jest to ujęte w poniższym twierdzeniu J. A. Guthriego oraz J. E. Nymanna [14], którego uzupełniony dowód został podany przez J. E. Nymanna oraz R. A. Sáenzę [33].

**Twierdzenie.** *Zbiór podsum szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich ma jedną z następujących postaci.*

- *Jest sumą rodziny skończonej złożonej z przedziałów domkniętych.*

- Jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.
- Jest Cantorvalem symetrycznym. □

Guthrie oraz Nymann zauważyli, że wzorcowy Cantorwal symetryczny można otrzymać przy pomocy standardowej konstrukcji trójkowego zbioru Cantora. Mianowicie, niech  $C$  oznacza trójkowy zbiór Cantora oraz  $S_n$  oznacza sumę otwartych odcinków, które są usuwane w  $n$ -tym kroku indukcyjnym tej konstrukcji. Wówczas  $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n>0} S_n$  oraz

$$S := C \cup \bigcup_{n>0} S_{2n-1}$$

jest Cantorvalem symetrycznym. Także, patrz [14, str. 324], zbiór wszystkich podsum ciągu  $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \dots$ , tzn. ciągu  $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$  danego wzorami

$$x_{2k-1} = \frac{3}{4^k} \text{ oraz } x_{2k} = \frac{2}{4^k},$$

jest Cantorvalem symetrycznym. W pracy [6] rozważamy geometryczne właściwości tego Cantorwala. Niektóre z nich, w istocie rzeczy korzystają z rozumowań typowych dla teorii kategorii. Na przykład, rozważmy podzbiór liczb rzeczywistych

$$(5) \quad \mathbb{X} = \left\{ \sum_{n>0} \frac{x_n}{4^n} : \forall_n x_n \in \{0, 2, 3, 5\} \right\}.$$

Tak więc  $\mathbb{X} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ , gdzie

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \sum_{n \in A} \frac{2}{4^n} : 0 \notin A \subset \omega \right\} \text{ oraz } \mathcal{C}_2 = \left\{ \sum_{n \in B} \frac{3}{4^n} : 0 \notin B \subset \omega \right\}.$$

Dowolna liczba  $x \in \mathbb{X}$  jest wyznaczona przez ciąg  $\langle x_n \rangle_{n>0}$  taki, że  $x = \sum_{n>0} \frac{x_n}{4^n}$ . W skrócie  $x_n$  będziemy nazywali  $n$ -tą cyfrą  $x$ , zaś ciąg  $\langle x_n \rangle_{n>0}$  będziemy nazywali cyfrową reprezentacją liczby  $x \in \mathbb{X}$ . Pamiętając o sposobie obliczania sumy nieskończonego szeregu geometrycznego, wprowadzamy następujące oznaczenia.

$$\mathcal{C}_1(n) = \sum_{k>n} \frac{2}{4^k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n}, \text{ w szczególności } \mathcal{C}_1(0) = \frac{2}{3};$$

$$\mathcal{C}_2(n) = \sum_{k>n} \frac{3}{4^k} = \frac{1}{4^n}, \text{ w szczególności } \mathcal{C}_2(0) = 1;$$

$$\mathcal{X}(n) = \sum_{k>n} \frac{5}{4^k} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4^n}, \text{ w szczególności } \mathcal{X}(0) = \frac{5}{3}.$$

Skoro  $\mathcal{X}(0) = \frac{5}{3}$ , to  $\mathbb{X} \subset [0, \frac{5}{3}]$ . Inwolucja  $h: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  określona wzorem

$$x \mapsto h(x) = \frac{5}{3} - x$$

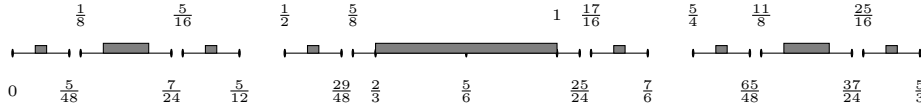
to symetria  $\mathbb{X}$  względem punktu  $\frac{5}{6}$ . Istotnie, wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{n \in A} \frac{2}{4^n} + \sum_{n \in B} \frac{3}{4^n} = x \in \mathbb{X} \Rightarrow \frac{5}{3} - x = \sum_{\substack{n \notin A \\ n > 0}} \frac{2}{4^n} + \sum_{\substack{n \notin B \\ n > 0}} \frac{3}{4^n} \in \mathbb{X};$$

oraz i to, że

$$\frac{1}{2} + \sum_{n > 0} \frac{5}{4^{2n}} = \frac{3}{4} + \sum_{n > 0} \frac{5}{4^{2n+1}} = \frac{5}{6} \in \mathbb{X}.$$

Dostajemy  $\mathbb{X} = \frac{5}{3} - \mathbb{X}$  oraz  $\mathbb{X} = h[\mathbb{X}]$ . Na poniższym rysunku przedstawiamy przybliżenie  $\mathbb{X}$ .



Odcinki  $(\frac{5}{12}, \frac{1}{2})$  oraz  $(\frac{7}{6}, \frac{5}{4})$ , oba długości  $\frac{1}{12}$ , są rozłączne z  $\mathbb{X}$ . Sześć odcinków  $(\frac{5}{48}, \frac{1}{8})$ ,  $(\frac{7}{24}, \frac{5}{16})$ ,  $(\frac{29}{48}, \frac{5}{8})$ ,  $(\frac{25}{24}, \frac{17}{16})$ ,  $(\frac{65}{48}, \frac{11}{8})$  oraz  $(\frac{37}{24}, \frac{25}{16})$ , mających długość  $\frac{1}{48}$ , leży w dopełnieniu  $\mathbb{X}$ . Pozostałe odcinki leżące w dopełnieniu  $\mathbb{X}$  są długości nie większej niż  $\frac{1}{192}$ . Aby ustalić jakie odcinki są zawarte w  $\mathbb{X}$ , a są to odcinki zaznaczone pogrubioną linią, potrzebujemy co następuje. Niech

$$K_n = [\frac{2}{3}, 1] \cap \{ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{4^i} : \forall_i x_i \in \{0, 2, 3, 5\} \}.$$

Dostajemy  $K_1 = \{\frac{3}{4}\}$  oraz  $K_2 = \{\frac{11}{16}, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}\}$ . Skoro  $\mathcal{C}_1(0) = \frac{2}{3}$  oraz  $\mathcal{C}_1(n) < \frac{3}{4^{n+1}}$ , to

$$f_1^n = \frac{3}{4^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{4^i} > \frac{2}{3}$$

jest najmniejszą liczbą w  $K_n$ . Analogicznie,  $\mathcal{X}(n) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4^n} < \frac{2}{4^n}$  oraz  $\mathcal{C}_2(0) = 1$  implikuje, że

$$f_{|K_n|}^n = \sum_{i=1}^n \frac{3}{4^i} < 1$$

to największa liczba w  $K_n$ .

**Stwierdzenie 23.** Liczby należące do  $K_n$  są położone w odcinku  $[\frac{2}{3}, 1]$  kolejno w odległości  $\frac{1}{4^n}$ , zaczynając od  $\frac{3}{4^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{4^i}$  aż do  $\sum_{i=1}^n \frac{3}{4^i}$ . Czyli

$$|K_n| = \frac{1}{3}(4^n - 1) \text{ oraz } |K_{n+1}| = 4|K_n| + 1.$$

*Dowód.* Najpierw sprawdzamy, że  $|K_1| = 1$  oraz  $|K_2| = 5$ . Załóżmy, że

$$K_{n-1} = \{f_1^{n-1}, f_2^{n-1}, \dots, f_{|K_{n-1}|}^{n-1}\},$$

gdzie

$$f_1^{n-1} = \frac{3}{4^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{2}{4^i}, \text{ oraz } f_{j+1}^{n-1} - f_j^{n-1} = \frac{1}{4^{n-1}}$$

dla  $0 < j < |K_{n-1}| - 1$ , a więc  $f_{|K_{n-1}|}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3}{4^i}$ .

Rozważmy sumę (zbiorów)

$$K_{n-1} \cup \left(\frac{2}{4^n} + K_{n-1}\right) \cup \left(\frac{3}{4^n} + K_{n-1}\right) \cup \left(\frac{5}{4^n} + K_{n-1}\right),$$

usuńmy z niej liczbę  $\frac{5}{4^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3}{4^i} > 1$ , oraz dodajmy liczby  $f_1^n = \frac{3}{4^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{4^i}$  oraz  $f_3^n = \frac{5}{4^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{4^i}$ . Dostajemy zbiór

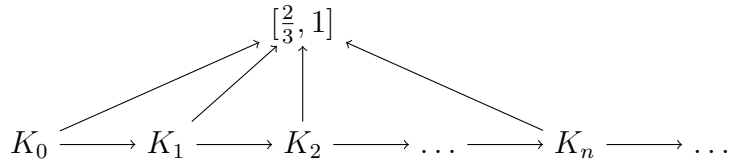
$$K_n = \{f_1^n, f_2^n, \dots, f_{\frac{1}{3}(4^n-1)}^n\},$$

co kończy dowód. □

**Wniosek 24.** *Odcinek  $[\frac{2}{3}, 1]$  jest zawarty w  $\mathbb{X}$ .*

*Dowód.* Wobec stwierdzenia 23 suma  $\bigcup_{n>0} K_n$  jest gęsta w odcinku  $[\frac{2}{3}, 1]$ , a więc  $[\frac{2}{3}, 1] \subset \mathbb{X}$ , ponieważ  $\mathbb{X}$  to zbiór domknięty. □

W gruncie rzeczy, uzasadnienie wniosku 24 polega na wykorzystaniu pojęcia kogranicy, co ilustruje poniższy diagram, gdzie wszystkie strzałki są włożeniami (inkluzjami).



Dodajmy, że w artykułach [14, str. 324] oraz [32, str. 865] podano, iż  $[\frac{3}{4}, 1] \subset \mathbb{X}$ . Jeśli wiemy, że  $\frac{5}{6}$  jest środkiem symetrii  $\mathbb{X}$ , to także mamy  $[\frac{2}{3}, 1] \subset \mathbb{X}$ . Przedział  $[\frac{2}{3}, 1]$  jest składową Cantorwała  $\mathbb{X}$ , co wynika z afinicznych własności  $\mathbb{X}$ , które opisaliśmy w pracy [6].

Rozważmy dopełnienie  $\mathbb{X}$  względem przedziału  $[0, \frac{5}{3}]$ . Jest to zbiór otwarty, który po domknięciu — to domknięcie będziemy oznaczali  $\mathbb{Z}$  — przecina  $\mathbb{X}$  na zbiorze homeomorficznym ze zbiorem Cantora. Istotnie, przekrój  $\mathbb{X} \cap \mathbb{Z}$  jest domknięty, zaś z warunku (S2) wynika, że jest w sobie gęsty, czyli jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. W pracy [6, Corollary 14] pokazaliśmy, że  $\mathbb{Z}$  nie może być zbiorem podsum jakiegokolwiek szeregu liczbowego różnowartościowego. Jednakże  $\mathbb{Z}$  jest homeomorficzny z  $\mathbb{X}$ . Według Z. Niteckiego [32, str. 869] oryginalna topologiczna charakteryzacja Cantorala symetrycznego z artykułu [14] zawiera lukę, która została usunięta dopiero w artykule [33] oraz uwzględniona (ang. *incorporated*) w [32, str. 869]. Poniżej podajemy „kategoryjny” dowód, który korzysta z metody *back-and-forth* zaliczonej przez W. Kubisia [21] do integralnej metody teorii granic Fraïsségo. Dla potrzeb tego dowodu zmodyfikujemy definicję Cantorala symetrycznego, korzystając z pojęcia brzegu. Mianowicie, *brzeg* podzbioru liczb rzeczywistych, np. Cantorala, to zbiór wszystkich punktów tego podzbioru, które nie mają otoczenia homeomorficznego z przedziałem otwartym.

**Nowa definicja Cantorala:** *Cantorval symetryczny to przestrzeń topologiczna homeomorficzna z podzbiorem liczb rzeczywistych, który jest regularnie domknięty oraz którego brzeg jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.*

Definicja ta jest równoważna definicji oryginalnej, co wynika z tego, że składowe jednopunktowe Cantorala symetrycznego mają otoczenia otwarte — względem topologii naturalnej dla liczb rzeczywistych — w których są zawarte przedziały leżące w tym Cantorale (wynika to z regularnej domkniętości) jak i przedziały z nim rozłączne (konsekwencja bycia składową trywialną). Nowa definicja Cantorala symetrycznego korzysta z faktu, że w takim Cantorale są trzy rodzaje punktów, różniące się własnościami lokalnymi:

Punkty wewnętrzne, a więc punkty zawarte w Cantorale wraz z przedziałami otwartymi wokół nich;

Punkty będące końcami składowych nietrywialnych;

Punkty wyznaczające składowe trywialne.

Użyte powyżej pojęcie brzegu Cantorala jest inaczej skonstruowane niż w podręczniku [9]. Tam brzeg zbioru jest określany jako przekrój jego domknięcia z domknięciem jego dopełnienia. W przypadku gdy rozważamy Cantorval położony w liczbach rzeczywistych, to obie definicje brzegu są równoważne.

**Twierdzenie 25.** *Jeśli  $X$  oraz  $Y$  są Cantoralami, to istnieje bijekcja rosnąca  $f: [\inf X, \sup X] \rightarrow [\inf Y, \sup Y]$  taka, że  $f[X] = Y$ .*

*Dowód.* Dowolny podzbiór otwarty liczb rzeczywistych jest sumą parami rozłącznych przedziałów otwartych, a więc niech  $A_X, B_X, A_Y$  oraz  $B_Y$  będą tego rodzaju rodzinami odpowiednio dla wnętrza  $X, [\inf X, \sup X] \setminus X$ , wnętrza  $Y$  oraz  $[\inf Y, \sup Y] \setminus Y$ . Rodziny te dziedziczą porządek liniowy, który jest izomorficzny z liczbami wymiernymi. Także porządki dziedziczone na  $A_X \cup B_X$  oraz  $A_Y \cup B_Y$  są izomorficzne z liczbami wymiernymi. Przy czym,  $A_X$  oraz  $B_X$  są gęste w  $A_X \cup B_X$ , a także  $A_Y$  oraz  $B_Y$  są gęste w  $A_Y \cup B_Y$ . Metodą *back-and-forth* nietrudno pokazać, że istnieje bijekcja rosnąca

$$F: A_X \cup B_X \rightarrow A_Y \cup B_Y$$

taka, że  $F[A_X] = A_Y$  oraz  $F[B_X] = B_Y$ . Przy pomocy  $F$  definiujemy następująco odwzorowanie rosnące

$$f: \bigcup (A_X \cup B_X) \rightarrow \bigcup (A_Y \cup B_Y).$$

Jeśli  $\alpha \in \bigcup (A_X \cup B_X)$ , to bierzemy przedział  $(p_\alpha, q_\alpha)$  taki, że

$$\alpha \in (p_\alpha, q_\alpha) \in A_X \cup B_X \text{ oraz } F(p_\alpha, q_\alpha) = (p'_\alpha, q'_\alpha) \in A_Y \cup B_Y.$$

Następnie kładziemy  $\alpha \mapsto f\alpha$ , gdzie  $f$  jest rosnącym (np. afinicznym) odwzorowaniem przedziału  $(p_\alpha, q_\alpha)$  na przedział  $(p'_\alpha, q'_\alpha)$ . Ostatecznie przedłużamy  $f$  do odwzorowania rosnącego przedziału  $[\inf X, \sup X]$  na przedział  $[\inf Y, \sup Y]$  i sprawdzamy, że to przedłużenie jest bijekcją jakiej potrzebujemy.  $\square$

Dowód powyższego twierdzenia uzupełniamy komentarzem.

Porządek na  $A_X$  jest wyznaczony następująco: Jeśli  $a_n, a_m \in A_X$ , to  $a_n < a_m$ , o ile  $a_n \neq a_m$  oraz istnieją  $s \in a_n$  oraz  $t \in a_m$  takie, że  $s < t$ . Podobnie jest z porządkami na  $B_X, A_Y$  oraz  $B_Y$ .

Brzeg Cantorvala, będąc homeomorficzny ze zbiorem Cantora, jest nigdziegęstym podzbiorem liczb rzeczywistych, a więc zbiór  $\bigcup (A_X \cup B_X)$  jest otwarty i gęsty w przedziale  $[\inf X, \sup X]$ . Analogicznie, zbiór  $\bigcup (A_Y \cup B_Y)$  jest otwarty i gęsty w przedziale  $[\inf Y, \sup Y]$ .

Metoda *back-and-forth* to metoda kategoryjna polegająca na specyficznym użyciu kogranicy. W tym przypadku w wersji dowodu indukcyjnego. Zaczynamy od ponumerowania przedziałów:  $A_X = \{a_n^X : n < \omega\}$ ,  $B_X = \{b_n^X : n < \omega\}$ ,  $A_Y = \{a_n^Y : n < \omega\}$  oraz  $B_Y = \{b_n^Y : n < \omega\}$ . W pierwszym kroku indukcji dobieramy

$$F(a_0^X) \in A_Y, F(b_0^X) \in B_Y, F^{-1}(b_0^Y) \in A_X \text{ oraz } F^{-1}(b_0^Y) \in B_X$$

tak, aby zachować porządek oraz różnowartościowość. Zakładając indukcyjnie, że  $F$  zostało określone dla  $\{a_k^X : k < m\} \cup \{b_k^X : k < m\}$ , a także  $F^{-1}$



dla  $\{a_k^Y : k < m\} \cup \{b_k^Y : k < m\}$  dobieramy  $F(a_m^X) \in A_Y$ ,  $F(b_m^X) \in B_Y$ ,  $F^{-1}(b_m^Y) \in A_X$  oraz  $F^{-1}(b_m^Y) \in B_X$  tak, aby zachować porządek oraz różnowartościowość. Wtedy bijekcja  $F$  jest sumą (kogranicą) par uporządkowanych określonych w krokach indukcyjnych.

**Wniosek 26.** *Każde dwa Cantorvale są homeomorficzne oraz liniowo izomorficzne.*  $\square$

## 4.2 O twierdzeniu J. von Neumanna

Ustalmy ciągi  $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ ,  $\langle y_n \rangle_{n < \omega}$  w przestrzeni metrycznej  $\langle X, \rho \rangle$ . Jeśli istnieje taka permutacja  $\pi : \omega \rightarrow \omega$ , że odległość  $\rho(x_n, y_{\pi n})$  jest zbieżna do 0, to ciągi  $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ ,  $\langle y_n \rangle_{n < \omega}$  mają ten sam zbiór granic częściowych (punktów skupienia). Okazuje się, że w zakresie przestrzeni metrycznych zwartych implikację tę można odwrócić. Mówi o tym następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 27** (J. von Neumann). *Jeśli ciągi  $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ ,  $\langle y_n \rangle_{n < \omega}$  w przestrzeni metrycznej zwartej  $\langle X, \rho \rangle$  mają ten sam zbiór punktów skupienia, to istnieje taka permutacja  $\pi : \omega \rightarrow \omega$ , że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{\pi n}) = 0$ .*

Twierdzenie to doczekało się kilku różnych dowodów, przykładowo w artykułach P. R. Halmos (1968) bądź J. A. Yorke (1969). Załóżmy, że  $\pi$  jest taką permutacją, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{\pi n}) = \alpha,$$

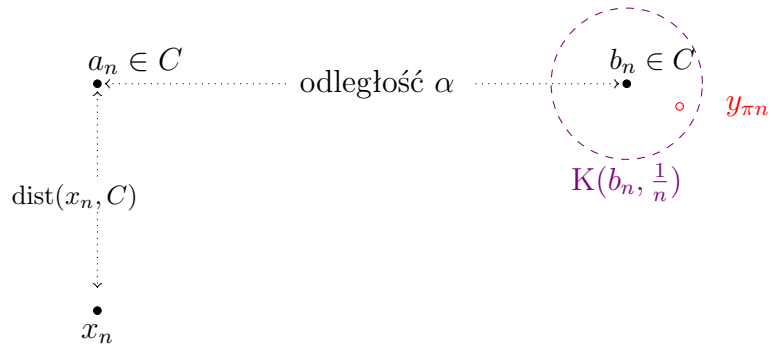
dla ustalonych ciągów  $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ ,  $\langle y_n \rangle_{n < \omega}$  o tym samym zbiorze punktów skupienia  $C$ . Wówczas dla każdego  $c \in C$  istnieje takie  $c' \in C$ , że  $\rho(c, c') = \alpha$ . Zatem liczba  $\alpha$  musi należeć do zbioru

$$S(C) = \{t : \forall x \in C \exists y \in C \rho(x, y) = t\}.$$

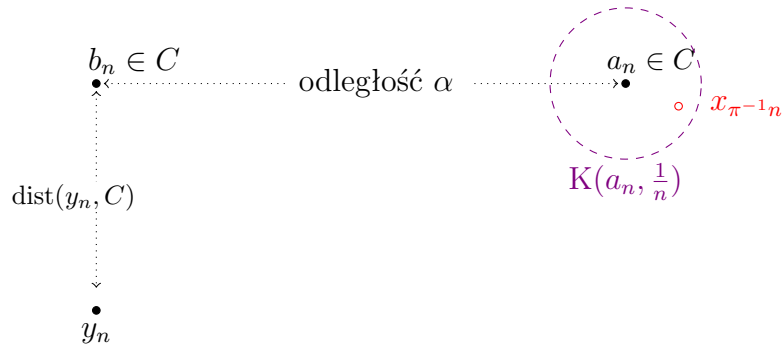
W pracy [6] zamieściliśmy następujące uogólnienie twierdzenia J. von Neumanna, gdzie  $X$  jest dowolną przestrzenią metryczną zwartą.

**Twierdzenie 28.** *Jeśli ciągi  $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$  oraz  $\langle y_n \rangle_{n < \omega}$  mają ten sam zbiór punktów skupienia  $C \subset X$  oraz  $\alpha \in S(C)$ , to istnieje permutacja  $\pi : \omega \rightarrow \omega$  taka, że  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n, y_{\pi n}) = \alpha$ .*

*Dowód.* Kolejny raz użyjemy metody *back-and-forth*. Tym razem ilustrujemy ją rysunkami. Definiujemy  $\pi n$ , o ile  $n \notin \{\pi^{-1}0, \pi^{-1}1, \dots, \pi^{-1}(n-1)\}$ .



Podobnie definiujemy  $\pi^{-1}n$ , o ile  $n \notin \{\pi 0, \pi 1, \dots, \pi(n-1)\}$ .



□

W moim przekonaniu rysunki w pełni zastępują formalny dowód powyższego twierdzenia.

## 5 Jak (czy) korzystać z teorii kategorii w rozważaniach topologicznych

Temat tej rozprawy to *Zastosowania teorii kategorii w topologii ogólnej*. Po przetłumaczeniu na język angielski, otrzymujemy znaczące podobieństwo z tytułem monografii *Topology and category theory in computer science*, [39]. Moje publikacje [35], [36] oraz [6] dotyczą topologii. W dotychczasowych rozdziałach opisałam w jakim zakresie korzystałam z pojęć teorii kategorii — być może nie do końca świadomie — ale niektóre elementy tej teorii pojawiają się w moich publikacjach. Przypuszczam, że intencją autorów monografii [39] było opisanie wdrożenia do nauki o komputerach (ang. *computer science*) podstawowych dziedzin matematycznych. Niewątpliwym atutem teorii kategorii to możliwość stosowania opisów nieliniowych, np. diagramy lub ilustracje takie jak w dowodzie twierdzenia 28. Pierwotna koncepcja mojej rozprawy doktorskiej zakładała, że zostaną omówione niezbędne pojęcia i twierdzenia teorii kategorii, a następnie wydedukowane — nowe, oryginalne — tezy dotyczące topologii. Przykładowo, mogło to dotyczyć tzw. obiektów uniwersalnych, które wymagają dobrania stosownej kategorii w której będą one obiektami słabo końcowymi lub słabo początkowymi.

### 5.1 Transformacja naturalna

Myśląc o zastosowaniach teorii kategorii oczekujemy, że dostarczy ona narzędzi porządkujących badaną tematykę. Innymi słowy — oczekujemy czegoś co mogłoby być analogią między analogiami. Przykładowo, odwzorowania między obiektami kategorii nazywamy strzałkami (morfizmami). Morfizmy między kategoriami nazywamy funktorami. Natomiast morfizmy między funktorami to przekształcenia jednego funktora w inny zachowujące strukturę kategorii na których te funktory operują. Odpowiednikiem analogii między analogiami może być pojęcie transformacji naturalnej.

Dla funktorów  $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  oraz  $G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  transformacją naturalną z  $F$  w  $G$  nazywamy przekształcenie  $\eta$  przypisujące dowolnemu  $X \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  strzałkę

$$\eta_X: FX \rightarrow GX$$

w kategorii  $\mathbf{D}$  taką, że dla dowolnej  $\mathbf{C}$ -strzałki  $f: X \rightarrow Y$  następujący diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc}
FX & \xrightarrow{\eta_X} & GX \\
Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\
FY & \xrightarrow{\eta_Y} & GY
\end{array}$$

Rodzinę strzałek  $\eta_X$ , gdzie  $X \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  nazywamy *komponentami transformacji naturalnej*  $\eta$ . Jeśli dla każdego  $X \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  odwzorowanie

$$\eta_X: FX \rightarrow GX$$

jest izomorfizmem w kategorii  $\mathbf{D}$  to funktory  $F$  i  $G$  nazywamy *naturalnie izomorficznymi*.

## 5.2 Kategoria $\sigma\mathbf{C}$

Oznaczmy przez  $\sigma\mathbf{C}$  klasę wszystkich ciągów przeliczalnych o wyrazach z kategorii  $\mathbf{C}$ . Chcielibyśmy przekształcić  $\sigma\mathbf{C}$  w kategorię w taki sposób, że strzałka z ciągu  $\vec{A}$  (porównaj str.57) w ciąg  $\vec{B}$  indukuje strzałkę z kogranicy ciągu  $\vec{A}$  w kogranicę ciągu  $\vec{B}$  jeśli tylko  $\mathbf{C}$  jest zanurzalna w kategorię, w której ciągi  $\vec{A}$  oraz  $\vec{B}$  mają kogranice. Ustalmy dwa ciągi przeliczalne  $\vec{A}$  oraz  $\vec{B}$  w danej kategorii  $\mathbf{C}$ , a więc

$$\omega = \text{dom}(\vec{A}) \text{ oraz } \omega = \text{dom}(\vec{B}).$$

*Transformacja* z  $\vec{A}$  do  $\vec{B}$  jest na mocy definicji transformacją naturalną z  $\vec{A}$  w  $\vec{B}\varphi$ , gdzie  $\varphi: \omega \rightarrow \omega$  jest zachowującym porządek odwzorowaniem (tzn. kowariantnym funktorem z  $\omega$  w  $\omega$ , traktowanymi jako kategorie). Aby zdefiniować strzałkę z  $\vec{A}$  do  $\vec{B}$  musimy identyfikować pewne transformacje. Ustalmy dwie transformacje naturalne

$$\lambda: \vec{A} \rightarrow \vec{B}\varphi \text{ oraz } \xi: \vec{A} \rightarrow \vec{B}\psi.$$

Powiemy, że  $\lambda$  oraz  $\xi$  są *równoważne* jeśli zachodzą następujące warunki:

(1) <sub>$\lambda\xi$</sub> ) Dla każdego  $m$  istnieje  $n \geq m$  takie, że  $\varphi m \leq \psi n$  oraz

$$b_{\varphi m}^{\psi n} \xi n = \lambda m a_m^n.$$

(2) <sub>$\lambda\xi$</sub> ) Dla każdego  $m$  istnieje  $n \geq m$  takie, że  $\psi m \leq \varphi n$  oraz

$$b_{\psi m}^{\varphi n} \lambda n = \xi m a_m^n.$$

To definiuje naprawdę relację równoważności tzn.  $\lambda$  jest w relacji z  $\xi$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi  $(1_{\lambda\xi})$  oraz  $(2_{\lambda\xi})$ . Istotnie,

- (zwrotność)

Należy pokazać, że dla każdego  $m$  istnieje  $k \geq m$  takie, że  $\varphi m \leq \varphi k$  oraz

$$b_{\varphi m}^{\varphi k} \lambda k = \lambda m a_m^k.$$

W roli  $k$  wystarczy wziąć  $m$ .

- (symetryczność)

Aby udowodnić  $(1_{\xi\lambda})$ , należy pokazać, że dla każdego  $m$  istnieje  $k \geq m$  takie, że  $\psi m \leq \varphi k$  oraz

$$b_{\psi m}^{\varphi k} \lambda k = \xi m a_m^k.$$

W roli  $k$  wystarczy wziąć  $n$  występujące w  $(2_{\lambda\xi})$ . Analogicznie sprawdzamy  $(2_{\xi\lambda})$  korzystając z  $(1_{\lambda\xi})$ .

- (przechodność)

Aby udowodnić  $(1_{\lambda\mu})$ , należy pokazać, że dla każdego  $m$  istnieje  $k \geq m$  takie, że  $\varphi m \leq \chi k$  oraz

$$b_{\varphi m}^{\chi k} \mu k = \lambda m a_m^k.$$

Ustalmy  $m$ . Z  $(1_{\lambda\xi})$  mamy  $n$  takie, że  $\varphi m \leq \psi n$  oraz

$$b_{\varphi m}^{\psi n} \xi n = \lambda m a_m^n.$$

Z warunku  $(1_{\xi\mu})$  dla  $n$  znajdujemy  $k \geq n$  takie, że  $\psi n \leq \chi k$  oraz

$$b_{\psi n}^{\chi k} \mu k = \xi n a_n^k.$$

Wtedy mamy

$$b_{\varphi m}^{\psi n} \xi n a_n^k = \lambda m a_m^n a_n^k.$$

Ostatecznie

$$b_{\varphi m}^{\chi k} \mu k = b_{\varphi m}^{\psi n} b_{\psi n}^{\chi k} \mu k = b_{\varphi m}^{\psi n} \xi n a_n^k = \lambda m a_m^n a_n^k = \lambda m a_m^k.$$

Analogicznie sprawdzamy  $(2_{\lambda\mu})$ .

Ta relacja równoważności formalnie jest kongruencją na kategorii transformacji. Każda klasa równoważności tej relacji będzie nazywana strzałką (albo morfizmem) z ciągu  $\vec{A}$  w ciąg  $\vec{B}$ . W istocie definiuje to kategorię struktury na wszystkich ciągach w  $\mathbf{C}$ . Formalnie zatem  $\sigma\mathbf{C}$  jest kategorią ilorazową z relacją równoważności opisaną powyżej.

### 5.3 Pullback oraz pushout

Ustalmy kategorię  $\mathbf{C}$ . Mówimy, że kategoria  $\mathbf{C}$  ma *własność amalgamacji* (porównaj str. 23), jeśli dla dowolnych  $\mathbf{C}$ -morfizmów  $f$  oraz  $g$  takich, że

$$\text{dom } f = \text{dom } g$$

istnieją  $\mathbf{C}$ -morfizmy  $f'$  i  $g'$  takie, że spełniona jest równość

$$g'f = f'g.$$

W tej definicji postulowane jest istnienie  $\mathbf{C}$ -obiektu

$$W = \text{cod } f' = \text{cod } g'.$$

Innymi słowy, kategoria  $\mathbf{C}$  ma własność amalgamacji jeśli dla dowolnych  $\mathbf{C}$ -obiektów  $X, Y, Z$  a także dla dowolnych morfizmów  $f \in \mathbf{C}(Z, X)$  oraz  $g \in \mathbf{C}(Z, Y)$  istnieje  $\mathbf{C}$ -obiekt  $W$  oraz istnieją  $\mathbf{C}$ -morfizmy  $f' \in \mathbf{C}(Y, W)$  i  $g' \in \mathbf{C}(X, W)$  takie, że  $g'f = f'g$ . Czyli następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y & \xrightarrow{f'} & W \end{array}$$

jest przemienny. Ponadto, jeśli ustalimy parę  $\mathbf{C}$ -morfizmów  $\langle f, g \rangle$  taką jak w diagramie, w kategorii  $\mathbf{C}$  może istnieć wiele par  $\langle g', f' \rangle$  spełniających równość  $g'f = f'g$ . Wśród nich jedna jest wyróżniona. Mianowicie, *pushout* pary  $\langle f, g \rangle$  to taka para  $\langle g', f' \rangle$ , że dla dowolnych  $\mathbf{C}$ -morfizmów  $g'', f''$  takich, że

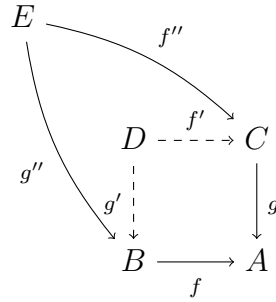
$$g''f = f''g$$

istnieje jedyne  $h$  spełniające

$$hg' = g'' \text{ oraz } hf' = f''.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow g'' \\ \downarrow h \\ \searrow f'' \\ E \end{array}$$

Analogicznie, odwracając strzałki, tj. zamieniając rolami operacje  $\text{dom}_{\mathbf{C}}$  oraz  $\text{cod}_{\mathbf{C}}$ , definiujemy *amalgamację odwrotną* oraz *pullback*. Pojęcie amalgamacji odwrotnej omawialiśmy przy okazji twierdzenia Knastera–Reichbacha. Pullback można zilustrować następującym diagramem.



W literaturze można spotkać również polski odpowiednik — cofnięcie — dla pojęcia pullback. Pojęcie to pojawia się często w matematyce, w szczególności w logice, np. w teorii modeli. Jego dualnym odpowiednikiem jest *pushout*, dla którego znacznie trudniej jest znaleźć spolszczoną nazwę, jednak czasami nazywany jest *wypchnięciem*.

W kategorii **Set** pullback stanowi uogólnienie operacji przecięcia zbiorów, jak i przeciwobrazu funkcji. Mianowicie, niech  $f: X \rightarrow Z$  oraz  $g: Y \rightarrow Z$  będą funkcjami określonymi na zbiorach niepustych. Kładziemy:

$$W = \{\langle x, y \rangle \in X \times Y : fx = gy\},$$

$$\pi_g \langle x, y \rangle = x,$$

$$\pi_f \langle x, y \rangle = y.$$

Odwzorowania  $\pi_g: W \rightarrow X$  oraz  $\pi_f: W \rightarrow Y$  nazywamy *rzutowaniami*. Natomiast trójkę  $\langle W, \pi_g, \pi_f \rangle$  możemy utożsamiać z pullbackiem pary  $\langle f, g \rangle$ . Jeśli  $Z$  jest zbiorem jednoelementowym to  $f$  oraz  $g$  są funkcjami stałymi, stale równymi temu jednemu elementowi, zaś pullback to iloczyn kartezjański  $X \times Y$  wraz z rzutowaniami  $\pi_g: X \times Y \rightarrow X$  oraz  $\pi_f: X \times Y \rightarrow Y$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \overset{\pi_f}{\dashrightarrow} & Y \\ \pi_g \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & \{z\} \end{array}$$

Jeśli rozważymy dowolne funkcje  $g'': S \rightarrow X$  oraz  $f'': S \rightarrow Y$  takie jakie pojawiają się w definicji pullbacku, to wzór

$$S \ni p \longmapsto \langle g''p, f''p \rangle$$

wyznacza funkcję  $h$ . Analogicznie jest z pushoutem. Załóżmy, że morfizmy  $Z \subset X$ ,  $Z \subset Y$ ,  $Y \subset W$  oraz  $X \subset W$  to zawierania, gdzie następujący diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{Z \subset X} & X \\ \downarrow Z \subset Y & & \downarrow X \subset W \\ Y & \dashrightarrow & W \\ & Y \subset W & \end{array}$$

Wówczas aby dostać pushout, zakładając  $Z = X \cap Y$ , kładziemy  $W = X \cup Y$ .

Założmy, że  $\langle W, \pi_g, \pi_f \rangle$  jest pullbackiem pary  $\langle f, g \rangle$ .

$$\begin{array}{ccc} W & \dashrightarrow^{\pi_f} & Y \\ \downarrow \pi_g & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Jeśli odwzorowanie  $f$  jest surjekcją to rzutowanie  $\pi_f$  jest również surjekcją. Istotnie, ustalmy punkt  $y \in Y$  oraz wybierzmy  $x \in f^{-1}[\{gy\}]$ . Wówczas  $fx = gy$ , a zatem  $\langle x, y \rangle \in W$  oraz  $\pi_f \langle x, y \rangle = y$ . Analogicznie uzasadniamy: Jeśli odwzorowanie  $g$  jest surjekcją to rzutowanie  $\pi_g$  jest również surjekcją.

Jeśli  $X, Y, Z$  są przestrzeniami topologicznymi oraz  $f, g$  są ciągłymi odwzorowaniami, to odwzorowania  $\pi_g, \pi_f$  są również ciągłe względem topologii na zbiorze

$$W = \{ \langle x, y \rangle \in X \times Y : fx = gy \}$$

dziedziczonej z topologii Tichonowa na  $X \times Y$ . Istotnie, w kategorii **Set** zbiór  $W \subset X \times Y$  wyznacza pullback. Zgodnie z definicją iloczynu kartezjańskiego  $X \times Y$  — porównaj [9, str. 106] — rzutowania na osie są ciągłe. Skoro odwzorowanie  $\pi_f$  jest zacieśnieniem rzutowania na oś  $Y$ , zaś  $\pi_g$  zacieśnieniem rzutowania na oś  $X$ , to oba te odwzorowania są ciągłe.

Założenie, że  $\langle W, \pi_g, \pi_f \rangle$  jest pullbackiem pary  $\langle f, g \rangle$  w kategorii **Set** oznacza, że dla dowolnego zbioru niepustego  $S$  oraz dowolnych odwzorowań



$q: S \rightarrow X, p: S \rightarrow Y$  spełniających

$$gp = fq$$

istnieje dokładnie jedno odwzorowanie  $h: S \rightarrow W$  takie, że

$$\pi_f h = p \text{ oraz } \pi_g h = q,$$

tzn.

$$hs = \langle qs, ps \rangle \in W$$

dla  $s \in S$ . Jeśli dodatkowo  $X, Y, Z$  oraz  $S$  są przestrzeniami topologicznymi takimi, że odwzorowania  $f, g, p$  oraz  $q$  są ciągłe, to  $h$  jest również ciągłe. Istotnie, ustalmy zbiór  $U_1 \times U_2$  taki, że  $U_1$  jest otwartym podzbiorem  $X$  oraz  $U_2$  jest otwartym podzbiorem  $Y$ . Wtedy

$$(U_1 \times U_2) \cap W = (U_1 \times Y) \cap (X \times U_2) \cap W = \pi_g^{-1}[U_1] \cap \pi_f^{-1}[U_2],$$

a więc

$$h^{-1}[(U_1 \times U_2) \cap W] = h^{-1}[\pi_g^{-1}[U_1]] \cap h^{-1}[\pi_f^{-1}[U_2]] = q^{-1}[U_1] \cap p^{-1}[U_2].$$

Wobec ciągłości  $p$  oraz  $q$  dostajemy ciągłość  $h$ .

Zatem zademonstrowaliśmy, jak niektóre własności pullbacku w kategorii **Set** niemal automatycznie przekładają się na własności pullbacku w kategorii **Top**.

## 6 O ciągach Fraïsségo

Diagram którego kategoria indeksów to liczby naturalne czasami bywa nazywany *ciągą induktywnym* lub w przypadku dualnym *ciągą odwrotnym*. Ciąg induktywny w kategorii  $\mathbf{C}$  to funktor kowariantny z liczby porządkowej  $\omega$  w kategorię  $\mathbf{C}$ . Innymi słowy, ciąg induktywny składa się z ciągu  $\langle A_n \rangle_{n < \omega}$  — którego wyrazami są  $\mathbf{C}$ -obiekty — razem z ciągiem  $\langle a_n^m \rangle_{m \leq n < \omega}$  — którego elementami są  $\mathbf{C}$ -strzałki — takim, że  $a_n^m \in \mathbf{C}(A_m, A_n)$  o ile  $m \leq n$ . Żądamy przy tym, aby

$$a_n^m a_m^l = a_n^l,$$

o ile  $l \leq m \leq n$ , przy czym  $a_n^n = \text{id}_{A_n}$  dla każdego  $n < \omega$ . Taki ciąg induktywny będziemy w skrócie oznaczać  $\vec{A}$ .

$$A_0 \xrightarrow{a_1^0} A_1 \xrightarrow{a_2^1} A_2 \xrightarrow{a_3^2} A_3 \xrightarrow{a_4^3} \dots$$

*Ciąg Fraïsségo* długości  $\omega$  w  $\mathbf{C}$  — krótko: *ciąg Fraïsségo* w  $\mathbf{C}$  — jest ciągiem induktywnym, o którym dodatkowo zakładamy, że spełnia następujące warunki:

- (K) Jeśli  $X \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ , to istnieje  $m < \omega$  takie, że  $\mathbf{C}(X, A_m) \neq \emptyset$ .
- (A) Jeśli  $m < \omega$  oraz  $f \in \mathbf{C}(A_m, Y)$ , to istnieją  $n \geq m$  oraz  $g \in \mathbf{C}(Y, A_n)$  takie, że  $a_n^m = gf$ .

Ciąg induktywny spełniający warunek (K) będziemy nazywać  *$\mathbf{C}$ -współkońcowym*. Warunek (A) bywa potocznie nazywanym *warunkiem powracania*, co sugeruje następujący diagram, gdzie  $Y \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  oraz  $m \leq n$ .

$$\begin{array}{ccc} A_m & \xrightarrow{a_n^m} & A_n \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & Y & \end{array}$$

Kogranicę ciągu Fraïsségo będziemy nazywać *granicą Fraïsségo*.

Dodajmy, że we wniosku 24 mieliśmy do czynienia z ciągiem Fraïsségo. Mianowicie możemy przyjąć, że obiektami kategorii  $\mathbf{C}$  są skończone podzbiory sumy  $\bigcup_{n > 0} K_n$ , zaś morfizmy to zanurzenia. Wtedy, warunki (K) oraz (A) są w oczywisty sposób spełnione.

Przypominamy, że *kogranica* ciągu induktywnego  $\vec{A}$ , to obiekt  $A$  wraz z rodziną  $\langle a^n: A_n \rightarrow A \rangle_{n < \omega}$  taką, że  $a^n a_n^m = a^m$  dla  $m < n$ , o tej własności, że dla każdego innego obiektu  $Y$  wraz z rodziną  $\langle p_n: A_n \rightarrow Y \rangle_{n < \omega}$  spełniającą  $p_n a_n^m = p_m$ , gdzie  $m < n$ , istnieje jedyna strzałka  $g: A \rightarrow Y$  taka, że  $ga^n = p_n$  dla każdego  $n < \omega$ . Kogranica, o ile istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Dodajmy do tego, że obiekt  $A$  niekoniecznie jest **C**-obiektem. Wracając do wniosku 24, kategorię **C** możemy rozszerzyć o dowolne nadzbiory zbioru  $\bigcup_{n > 0} K_n$ , dbając o to aby morfizmy były nadal zanurzeniami. Wtedy  $A = \bigcup_{n > 0} K_n$  wraz z zanurzeniami  $K_n \subset A$  jest kogranicą w sensie tak rozszerzonej kategorii.

W dowodzie twierdzenia 28 także można dostrzec spełnienie wymogów ciągu Fraïsségo. Istotnie, rozważmy zbiory

$$A_n = \{ \langle k, \pi k \rangle : k < n \} \cup \{ \langle \pi^{-1} k, k \rangle : k < n \}$$

wraz z zanurzeniami między nimi. Ciąg  $\langle A_n \rangle_{n < \omega}$  spełnia warunki (A) oraz (K) w kategorii, w której obiektami są skończone podzbiory sumy  $\bigcup_{n < \omega} A_n$ , a strzałki to zanurzenia. Wtedy permutacja  $\pi = \bigcup_{n < \omega} A_n$  jest granicą Fraïsségo ciągu  $\langle A_n \rangle_{n < \omega}$ .

**Lemat 29.** *Jeśli  $\langle d^n: D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$  jest kogranicą ciągu  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ ,  $\langle n_k \rangle_{k < \omega}$  jest ciągiem nieograniczonym oraz  $f, f': D \rightarrow D$  są takimi strzałkami, że  $fd^{n_k} = f'd^{n_k}$  dla każdego  $k < \omega$ , to  $f = f'$ .*

*Dowód.* Ustalmy ciąg  $\langle d_n^m: D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ . Niech  $\langle d^n: D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$  będzie jego kogranicą oraz ustalmy taki ciąg nieograniczony  $\langle n_k \rangle_{k < \omega}$ , że  $fd^{n_k} = f'd^{n_k}$  dla każdego  $k < \omega$ . Ustalmy  $m < \omega$ . Istnieje takie  $k < \omega$ , że  $n_k \geq m$ . Wtedy

$$fd^m = fd^{n_k} d_{n_k}^m = f'd^{n_k} d_{n_k}^m = f'd^m.$$

Stąd  $f = f'$ . □

Poniższy dowód to klasyczny argument *back-and-forth*.

**Twierdzenie 30.** *Kogranice ciągów Fraïsségo ustalonej kategorii są izomorficzne.*

*Dowód.* Ustalmy kogranice

$$\langle s^n: S_n \rightarrow S \rangle_{n < \omega} \text{ oraz } \langle z^n: Z_n \rightarrow Z \rangle_{n < \omega},$$

odpowiednio, ciągów Fraïsségo

$$\langle S_m \rightarrow S_n \rangle_{m \leq n < \omega} \text{ oraz } \langle Z_m \rightarrow Z_n \rangle_{m \leq n < \omega}.$$

Ze współkończowości ciągu  $\langle Z_m \rightarrow Z_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  wynika, że istnieje strzałka

$$f_0: S_0 \rightarrow Z_{n_0} \text{ dla pewnego } n_0.$$

Z własności powracania ciągu  $\langle S_m \rightarrow S_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  otrzymujemy  $m_1 > 0$  oraz taką strzałkę

$$g_0: Z_{n_0} \rightarrow S_{m_1} \text{ taką, że } g_0 f_0 = s_{m_1}^0.$$

Podobnie z własności powracania ciągu  $\langle Z_m \rightarrow Z_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  otrzymujemy takie  $n_1 > n_0$  oraz strzałkę

$$f_1: S_{m_1} \rightarrow Z_{n_1} \text{ taką, że } f_1 g_0 = z_{n_1}^{n_0}.$$

Kontynuując otrzymujemy podciągi  $\langle S_{m_k} \rangle_{k < \omega}$ ,  $\langle Z_{n_k} \rangle_{k < \omega}$  oraz ciągi strzałek  $\langle f_k: S_{m_k} \rightarrow Z_{n_k} \rangle_{k < \omega}$ ,  $\langle g_k: Z_{n_k} \rightarrow S_{m_{k+1}} \rangle_{k < \omega}$  o następujących własnościach:

$$g_k f_k = s_{m_{k+1}}^{m_k} \text{ oraz } f_{k+1} g_k = z_{n_{k+1}}^{n_k}$$

dla każdego  $k < \omega$ . Skoro  $S$  oraz  $Z$  są kogranicami, to istnieją takie strzałki  $f: S \rightarrow Z$  oraz  $g: Z \rightarrow S$ , że

$$f s^{m_k} = z^{n_k} f_k \text{ oraz } g z^{n_k} = s^{m_{k+1}} g_k$$

dla każdego  $k < \omega$ . Wtedy

$$g f s^{m_k} = g z^{n_k} f_k = s^{m_{k+1}} g_k f_k = s^{m_{k+1}} s_{m_{k+1}}^{m_k} = s^{m_k} = \text{id}_S s^{m_k}$$

oraz

$$f g z^{n_k} = f s^{m_{k+1}} g_k = z^{n_{k+1}} f_{k+1} g_k = z^{n_{k+1}} z_{n_{k+1}}^{n_k} = z^{n_k} = \text{id}_Z z^{n_k}$$

dla każdego  $k < \omega$ . Z lematu 29 otrzymujemy  $g f = \text{id}_S$  oraz  $f g = \text{id}_Z$ .  $\square$

## 6.1 Kryterium istnienia ciągu Fraïsségo

Poniżej podajemy kryterium pozwalające stwierdzić istnienie ciągu Fraïsségo w danej kategorii, zaczerpnięte z [21, Th.3.7]. Poprzedzimy je dwiema definicjami.

Kategoria  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  jest  *$\mathbf{C}$ -dominująca* jeśli spełnia następujące warunki:

- (D1) Klasa  $\text{Ob}_{\mathbf{D}}$  jest  $\mathbf{C}$ -współkończąca, tzn. dla każdego obiektu  $X \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  istnieje obiekt  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$  taki, że  $\mathbf{C}(X, A) \neq \emptyset$ .
- (D2) Dla każdego  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$  oraz  $\mathbf{C}$ -strzałki  $f: A \rightarrow Y$  istnieje  $\mathbf{C}$ -strzałka  $g: Y \rightarrow B$  taka, że  $gf$  jest  $\mathbf{D}$ -strzałką.

Powiemy, że  $\mathbf{D}$  jest *przeliczalna* jeśli  $\mathbf{D}$  ma przeliczalnie wiele obiektów oraz dla każdego  $A, B \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$  zbiór  $\mathbf{D}(A, B)$  jest przeliczalny.

**Twierdzenie 31.** *Założmy, że kategoria  $\mathbf{C}$  jest skierowana i ma własność amalgamacji. Jeśli  $\mathbf{C}$  zawiera przeliczalną kategorię  $\mathbf{D}$ , która jest  $\mathbf{C}$ -dominująca to  $\mathbf{C}$  ma ciąg Fraïsségo.*

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy, na potrzeby dowodu, kategorie  $\omega$  — rozważaną jako porządek częściowy — oraz  $\mathbf{D}$ , utożsamiać z ich klasami strzałek, tzn. niech  $\Delta = \{\langle m, n \rangle : m \leq n\}$  oznacza  $\text{Arr}_{\omega}$  oraz  $\mathbf{D}$  oznacza  $\text{Arr}_{\mathbf{D}}$ . Jeśli będziemy chcieli odwołać się do obiektów tych kategorii to zostanie to wyraźnie zaznaczone. Ciąg induktywny  $\vec{X}$  w  $\mathbf{D}$  rozważamy jako funkcję z  $\Delta$  w  $\mathbf{D}$  spełniającą równość

$$\vec{X}\langle l, m \rangle \vec{X}\langle k, l \rangle = \vec{X}\langle k, m \rangle$$

dla wszystkich  $k \leq l \leq m$ . Wtedy zbiór

$$C = \{\vec{X} : \vec{X} \text{ jest ciągiem induktywnym w } \mathbf{D}\}$$

jest domkniętym podzbiorem przestrzeni polskiej  $\mathbf{D}^{\Delta}$ , rozważanej z topologią produktową. Istotnie, niech  $\vec{X} \in \mathbf{D}^{\Delta} \setminus C$ . Wówczas istnieją  $k \leq l \leq m$  takie, że

$$\vec{X}\langle l, m \rangle \vec{X}\langle k, l \rangle \neq \vec{X}\langle k, m \rangle.$$

Definiujemy

$$U = \text{pr}_{\langle l, m \rangle}^{-1}[\{\vec{X}\langle l, m \rangle\}] \cap \text{pr}_{\langle k, l \rangle}^{-1}[\{\vec{X}\langle k, l \rangle\}] \cap \text{pr}_{\langle k, m \rangle}^{-1}[\{\vec{X}\langle k, m \rangle\}].$$

Wtedy oczywiście  $\vec{X} \in U$  oraz  $U \cap C = \emptyset$ .

Niech  $X$  będzie obiektem kategorii  $\mathbf{D}$ . Definiujemy

$$U_X = \{\vec{X} \in C : \text{istnieje strzałka } X \rightarrow \vec{X}\},$$

gdzie strzałka w powyższej definicji — z obiektu  $X$  w ciąg — oznacza strzałkę  $X \rightarrow \text{dom } \vec{X}\langle n, n+1 \rangle = X_n$  dla pewnego  $n < \omega$ . Zbiór  $U_X$  jest otwarty

i gęsty w  $C$ . Istotnie, niech  $\vec{X} \in U_X$ . Dla ustalenia uwagi załóżmy, że istnieje strzałka  $X \rightarrow X_n$ . Wówczas

$$\vec{X} \in V = \{\vec{Y} \in C : Y_n = X_n\} \subset U_X.$$

Aby pokazać, że  $U_X$  jest gęsty w  $C$ , ustalmy zbiór otwarty  $W$  taki, że  $\vec{X} \in W$  oraz  $W$  jest zbiorem wszystkich przedłużeń ciągu skończonego  $\vec{X} \upharpoonright \{\langle k, m \rangle : k \leq m \leq n\}$ . Konstruujemy  $\vec{Y} \in U_X$  taki, że  $\vec{Y} \in W$ , następująco. Przyjmujemy

$$\vec{Y} \upharpoonright \{\langle k, m \rangle : k \leq m \leq n\} = \vec{X} \upharpoonright \{\langle k, m \rangle : k \leq m \leq n\}.$$

Wykorzystując własność skierowania dla  $X$  oraz  $X_n$  mamy  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  i  $\mathbf{C}$ -strzałki  $g: X \rightarrow A$  oraz  $f: X_n \rightarrow A$ . Na mocy (D2) istnieje  $\mathbf{C}$ -strzałka  $h: A \rightarrow B$  taka, że  $hf$  jest  $\mathbf{D}$ -strzałką.

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow X_n = Y_n \longrightarrow \cdots \\ \quad \quad \quad \searrow f \\ \quad \quad \quad A \dashrightarrow B \\ \quad \quad \quad \nearrow g \\ X \end{array}$$

Dla każdego  $k \geq n+1$  przyjmujemy  $Y_k = B$ , a dla każdego  $l \geq k \geq n+1$  strzałkami w ciągu  $\vec{Y}$  są  $hf: Y_n \rightarrow Y_k$  oraz  $\text{id}_B: Y_k \rightarrow Y_l$ .

Poszukiwany ciąg  $\vec{Y}$  przedstawia się następująco:

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow Y_n \xrightarrow{hf} B \xrightarrow{\text{id}_B} B \xrightarrow{\text{id}_B} \cdots \\ \quad \quad \quad \nearrow hg \\ X \end{array}$$

Niech  $f: A \rightarrow B$  będzie  $\mathbf{D}$ -strzałką oraz  $n < \omega$ . Definiujemy:

$$V_{n,f} = \{\vec{X} \in C : X_n = A \implies (\exists m > n)(\exists g) gf = x_m^n\}.$$

Ponownie  $V_{n,f}$  jest otwarty i gęsty w  $C$ . Istotnie, niech  $\vec{X} \in V_{n,f}$ . Wtedy mamy dwie możliwości:

- $X_n \neq A$ . Wtedy  $\vec{X} \in V = \{\vec{Y} \in C : Y_n = X_n\} \subset V_{n,f}$ .

- $X_n = A$ . Niech  $m > n$  oraz  $g$  będą takie, że  $gf = x_m^n$ . Wtedy

$$\vec{X} \in V = \{\vec{Y} \in C : Y_n = X_n \text{ oraz } Y_m = X_m\} \subset V_{n,f}.$$

Do pokazania, że  $V_{n,f}$  jest gęsty w  $C$  wykorzystamy własność amalgamacji. Ustalmy zbiór otwarty  $W$  taki, że  $\vec{X} \in W$  oraz  $W$  jest zbiorem wszystkich przedłużeń ciągu skończonego  $\vec{X} \upharpoonright \{\langle i, j \rangle : i \leq j \leq k\}$ . Możemy założyć, że  $k > n$ . Jeśli  $X_n \neq A$  to  $\vec{X}$  jest poszukiwanym ciągiem. Załóżmy zatem, że  $X_n = A$ . Konstruujemy  $\vec{Y} \in V_{n,f}$  taki, że  $\vec{Y} \in W$  następująco.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & X_n = Y_n = A & \xrightarrow{x_k^n} & X_k = Y_k & \longrightarrow & & \\ & \searrow f & & \searrow f' & & & \\ & B & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{g_0} & Y_m & \xrightarrow{\text{id}_{Y_m}} Y_m \xrightarrow{\text{id}_{Y_m}} Y_m \end{array}$$

Stosując własność amalgamacji dla  $f$  oraz  $x_k^n$  znajdziemy  $\mathbf{C}$ -obiekt  $Z$  oraz  $\mathbf{C}$ -strzałki  $f'$  i  $h$  takie, że  $\text{cod } f' = Z = \text{cod } h$  oraz  $f'x_k^n = hf$ . Z własności (D2) istnieje  $\mathbf{C}$ -strzałka  $g$  taka, że  $gf'$  jest  $\mathbf{D}$ -strzałką. Niech  $Y_m = \text{cod } g$ . Przyjmujemy  $gf'$  jako strzałkę z  $Y_k$  do  $Y_m$  oraz  $Y_i = Y_m$  dla każdego  $i \geq m+1$ . Dla każdego  $j \geq i \geq m$  strzałkami w ciągu  $\vec{Y}$  są  $\text{id}_{Y_m} : Y_i \rightarrow Y_j$ .

Poszukiwany ciąg  $\vec{Y}$  przedstawia się następująco:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Y_n & \xrightarrow{x_k^n} & Y_k & \xrightarrow{gf'} & Y_m \longrightarrow Y_m \longrightarrow \cdots \\ & & \searrow f & & \searrow gh & & \\ & & B & & & & \end{array}$$

Wykorzystując twierdzenie Baire'a o kategorii mówiące, że w przestrzeni zupełnej przekrój przeliczalnej rodziny gęstych zbiorów otwartych jest gęsty, możemy znaleźć ciąg  $\vec{U} \in C$ , który należy do wszystkich zbiorów zdefiniowanych wcześniej, tzn.

$$\vec{U} \in \bigcap_{A, X \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}} (U_X \cap \bigcap_n \bigcap_{f \in \mathbf{D}(A, X)} V_{f, n}).$$

Ciąg  $\vec{U}$  jest ciągiem Fraïsségo w kategorii  $\mathbf{C}$ . Istotnie, w celu udowodnienia warunku (K) ustalmy  $X \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ . Z własności (D1) istnieje  $\mathbf{D}$ -obiekt  $A$  taki, że  $\mathbf{C}(X, A) \neq \emptyset$ . Ponieważ  $\vec{U} \in U_A$  więc istnieje strzałka z  $A$  w ciąg  $\vec{U}$ .

Zatem istnieje takie  $n < \omega$ , że  $\mathbf{C}(A, U_n) \neq \emptyset$ . Wtedy również  $\mathbf{C}(X, U_n) \neq \emptyset$ . Dla dowodu własności (A) ustalmy  $n < \omega$  oraz  $\mathbf{C}$ -strzałkę  $f: U_n \rightarrow Y$  dla pewnego  $\mathbf{C}$ -obektu  $Y$ . Z własności (D2) istnieje  $\mathbf{C}$ -strzałka  $f': Y \rightarrow B$  taka, że  $f'f$  jest  $\mathbf{D}$ -strzałką. Ponieważ  $\vec{U} \in V_{f'f, n}$  więc istnieje  $m > n$  oraz  $g$  takie, że  $gf'f = u_m^n$ . Ponieważ  $g(f'f) = (gf')f$ , więc  $gf'$  jest strzałką, której szukaliśmy.

$$\begin{array}{ccccc} \dashrightarrow & U_n & \overset{u_m^n}{\dashrightarrow} & U_m & \dashrightarrow \\ & \searrow f & & \nearrow g & \\ & Y & \xrightarrow{f'} & B & \end{array}$$

□

Powiemy, że kategoria  $\mathbf{C}$  jest *kategorią Fraïsségo* jeśli:

- (F1)  $\mathbf{C}$  jest skierowana,
- (F2)  $\mathbf{C}$  ma własność amalgamacji,
- (F3)  $\mathbf{C}$  jest *istotnie przeliczalna*, tzn.  $\mathbf{C}$  ma przeliczalnie wiele obiektów z dokładnością do izomorfizmu oraz dla każdych  $X, Y \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  zbiór  $\mathbf{C}(X, Y)$  jest przeliczalny.

Próbowałam także przedstawić Cantorval jako granicę Fraïsségo. Jednakże okazało się, że takie próby mogą być wersją „sztuki dla sztuki”. Mianowicie, w pracy [6] opisaliśmy Cantorval jako ciągły obraz zbioru Cantora, gdzie granica Fraïsségo jest dostrzegalna w głębokim tle. Pozwoliło to otrzymać rezultat, który w skrócie opisujemy poniżej.

Założmy, że mamy dwie reprezentacje cyfrowe  $x \in \mathbb{X}$ , (patrz równość (5) str. 42) czyli ustalamy ciągi  $A = \langle a_n \rangle_{n>0}$  oraz  $B = \langle b_n \rangle_{n>0}$  takie, że

$$\sum_{n>0} \frac{a_n}{4^n} = \sum_{n>0} \frac{b_n}{4^n} = x,$$

gdzie  $a_n, b_n \in \{0, 2, 3, 5\}$ .

Ustalimy zależność między wyrazami  $a_n$  oraz  $b_n$ . Niech  $n_0$  będzie najmniejszym z indeksów takim, że  $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ . Bez straty ogólności zakładamy  $a_{n_0} = 2 < b_{n_0} = 3$ , pamiętając o tym, iż  $\mathcal{X}(n_0) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4^{n_0}}$ . Wtedy mówimy, że  $A$  *dogania*  $B$  (lub  $B$  jest *doganiane* przez  $A$ ) w kroku  $n_0$ . Czyli

$$\sum_{i>n_0} \frac{a_i}{4^i} = \sum_{i>n_0} \frac{b_i}{4^i} + \frac{1}{4^{n_0}}, \text{ gdzie } a_k = b_k \text{ dla } k < n_0.$$



Dopóki  $A$  dogania  $B$  nie może być  $a_k = 5$  oraz  $b_k = 0$  dla pewnego  $k > n_0$ , a więc musi być  $b_k + 3 = a_k$  dla kolejnych  $k > n_0$  nie zmieniających relacji doganiania. Gdyby stale  $a_k - b_k = 3$ , to ta relacja nie ulegnie zmianie, bo

$$\sum_{i>n_0} \frac{3}{4^i} = \frac{1}{4^{n_0}}.$$

Gdy  $n_1 > n_0$  jest najmniejszym z indeksów takim, że

$$a_{n_1} = 5 \text{ oraz } b_{n_1} = 0,$$

to  $B$  zaczyna doganiać  $A$  w kroku  $n_1$ . Postępując tak dalej, dostaniemy rosnący (skończony bądź nieskończony) ciąg  $n_0 < n_1 < \dots$  taki, że

$$|a_{n_k} - b_{n_k}| = 5 \text{ oraz } |a_i - b_i| = 3 \text{ dla } n_0 < i \notin \{n_1, n_2, \dots\}.$$

Co więcej,  $A$  zaczyna doganiać  $B$  w kroku  $n_k$  dla parzystych  $k$  oraz  $B$  zaczyna doganiać  $A$  w kroku  $n_k$  dla nieparzystych  $k$ . W pozostałych krokach relacja doganiania nie ulega zmianie.

**Twierdzenie 32.** *Założmy, że punkt  $x \in \mathbb{X}$  ma dwie reprezentacje cyfrowe. Wtedy istnieje ciąg liczb naturalnych  $n_0 < n_1 < \dots$  oraz dokładnie dwie reprezentacje cyfrowe  $\langle a_n \rangle_{n>0}$  oraz  $\langle b_n \rangle_{n>0}$  punktu  $x$  takie, że:*

- $a_k = b_k$ , o ile  $0 < k < n_0$ ;
- $a_{n_0} = 2$  oraz  $b_{n_0} = 3$ ;
- $a_{n_k} = 5$  oraz  $b_{n_k} = 0$ , dla nieparzystych  $k$ ;
- $a_{n_k} = 0$  oraz  $b_{n_k} = 5$ , dla parzystych  $k > 0$ ;
- $a_i \in \{3, 5\}$  oraz  $a_i - b_i = 3$ , o ile  $n_{2k} < i < n_{2k+1}$ ;
- $a_i \in \{0, 2\}$  oraz  $b_i - a_i = 3$ , o ile  $n_{2k+1} < i < n_{2k+2}$ .

*Dowód.* Zgodnie z opisanym powyżej algorytmem doganiania w kroku  $n_k$  następuje zamiana ról: gonionego z doganianym. Gdy ten algorytm nie może wystartować, to rozważany punkt  $x \in \mathbb{X}$  ma dokładnie jedną reprezentację cyfrową.  $\square$

W artykule [6] omawiamy kilka rezultatów wynikających z powyższego twierdzenia.

## 6.2 Ciągi Fraïsségo w kategorii $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$

Ustalmy kategorię  $\mathbf{C}$  i jej podkategorię  $\mathbf{D}$ . Mówimy, że  $U \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  ma własność **D-przedłużania**, gdy dla każdej  $\mathbf{C}$ -strzałki  $A \rightarrow U$  oraz  $\mathbf{D}$ -strzałki  $A \rightarrow A'$  istnieje taka  $\mathbf{C}$ -strzałka  $A' \rightarrow U$ , że przemienny jest diagram (6).

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \nearrow & \\ A' & & \end{array}$$

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & D \\ \uparrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

Ustalmy ciąg  $\mathbf{D}$ -obiektów  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  oraz jego kogranicę  $\langle D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$  w kategorii  $\mathbf{C}$ . Mówimy, że podkategoria  $\mathbf{D}$  jest *mała* względem kogranicy  $\langle D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$ , gdy dla każdego  $\mathbf{D}$ -obiektu  $A$  oraz strzałki  $A \rightarrow D$  istnieje takie  $n$  oraz strzałka  $A \rightarrow D_n$ , że przemienny jest diagram (7). Analogicznie definiujemy pojęcie kategorii małej względem granicy ciągu. Związek pomiędzy ciągami Fraïsségo a własnością przedłużania opisuje następujący lemat.

**Lemat 33.** *Założmy, że  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  jest podkategorią, która ma własność amalgamacji, a kategoria  $\mathbf{C}$  ma obiekt słabo początkowy, który jest jednocześnie  $\mathbf{D}$ -obiektem. Jeśli podkategoria  $\mathbf{D}$  jest mała względem kogranicy  $\langle D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$  — składającej się z rodziny monomorfizmów — ciągu  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ , to  $D$  ma własność **D-przedłużania** wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  jest ciągiem Fraïsségo w kategorii  $\mathbf{D}$ .*

*Dowód.* Ustalmy ciąg  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ , jego kogranicę  $\langle D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$  i założmy, że  $D$  ma własność **D-przedłużania**. Ustalmy  $\mathbf{D}$ -obiekt  $A$ . Niech  $0$  będzie obiektem słabo początkowym kategorii  $\mathbf{C}$ . Z własności przedłużania wynika, że istnieje taka strzałka  $A \rightarrow D$ , że przemienny jest diagram (8).

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & D \\ \downarrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & D \\ \uparrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} D_m & \longrightarrow & D \\ \downarrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

Kategoria  $\mathbf{D}$  jest mała względem kogranicy, a więc istnieje takie  $n$  oraz strzałka  $A \rightarrow D_n$ , że przemienny jest diagram (9) co kończy dowód współkończoności ciągu  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ .

Ustalmy teraz  $\mathbf{D}$ -strzałkę  $D_m \rightarrow A$ . Z własności **D-przedłużania** wynika, że istnieje takie  $A \rightarrow D$ , że przemienny jest diagram (10).

Korzystając ponownie z tego, że kategoria  $\mathbf{D}$  jest mała względem kogranicy otrzymujemy dla pewnego  $n$  oraz  $A \rightarrow D_n$  diagram przemienny (11).

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} D_m & \xrightarrow{\quad} & D \\ \downarrow & & \uparrow \\ A & \dashrightarrow & D_n \end{array}$$

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} D_m & \xrightarrow{\quad} & D \\ & \searrow & \uparrow \\ & & D_n \end{array}$$

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} D_m & & \\ \downarrow & \searrow & \\ A & \dashrightarrow & D_n \end{array}$$

Możemy założyć, że  $m \leq n$ , a więc z definicji kogranicy przemienny jest również diagram (12). Skoro  $D_n \rightarrow D$  jest monomorfizmem, to przemienny jest diagram (13). Kończy to dowód własności powracania.

Założmy teraz, że  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  jest ciągiem Fraïsségo. Pokażemy, że  $D$  ma własność  $\mathbf{D}$ -przedłużania. Ustalmy  $A \rightarrow D$  oraz  $\mathbf{D}$ -strzałkę  $A \rightarrow A'$ . Kategoria  $\mathbf{D}$  jest mała względem kogranicy, a więc istnieje takie  $m$  oraz  $A \rightarrow D_m$ , że przemienny jest diagram (14).

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & D \\ \downarrow \text{dashed} & & \uparrow \\ D_m & & \end{array}$$

$$(15) \quad \begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{\quad} & D \\ & \swarrow & \downarrow \text{dashed} & \nearrow & \uparrow \\ & A' & D_m & \xrightarrow{\quad} & D_n \\ & \searrow \text{dotted} & \downarrow \text{dotted} & \nearrow \text{dashed} & \\ & & \bullet & & \end{array}$$

Korzystając z własności amalgamacji a następnie powracania otrzymujemy diagram przemienny (15). Kończy to dowód własności  $\mathbf{D}$ -przedłużania.  $\square$

Zauważmy, że jeśli w podkategorii  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  w powyższym lemacie wszystkie strzałki są monomorfizmami, ciąg  $\langle D_m \rightarrow D_n \rangle_{m \leq n < \omega}$  jest ciągiem Fraïsségo, a  $\langle D_n \rightarrow D \rangle_{n < \omega}$  jest jego granicą, to strzałkę  $A' \rightarrow D$  dopełniającą diagram (15) można dobrać tak, aby była monomorfizmem.

Będziemy pracować w pewnej comma kategorii związanej z  $\mathbf{C}$ . Kategorie przecinkowe (ang. *comma categories*) w teorii Fraïsségo zostały już użyte przez Pech i Pech [34]. Dla każdego  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  definiujemy podkategorię  $\mathbf{D}/A$  kategorii przecinkowej  $\mathbf{C}/A$  przyjmując, że  $\mathbf{D}/A$ -obiektem jest każda strzałka  $D \rightarrow A$ , gdzie  $D$  jest  $\mathbf{D}$ -obiektem. Zatem  $\mathbf{D}/A$ -strzałką z  $D \rightarrow A$  do  $D' \rightarrow A$  jest każda taka strzałka  $D \rightarrow D'$ , że przemienny jest diagram (16).

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} D & \dashrightarrow & D' \\ \downarrow & \swarrow & \\ A & & \end{array}$$

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 2^\omega \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ D & \longleftarrow & D' \end{array}$$

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 2^\omega \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \downarrow \\ D & \longleftarrow & D' \end{array}$$

Wynika stąd, że funkcja ciągła  $A \rightarrow 2^\omega$  (która jest  $\mathbf{Top}^{\text{op}}/A$ -obiektem) ma własność  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ -przedłużania, gdy dla każdego diagramu przemienne (17) funkcji ciągłych istnieje taka funkcja ciągła  $2^\omega \rightarrow D'$ , że przemienność jest diagram (18). Od tego momentu kategorię  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$  będziemy rozważać biorąc pod uwagę jedynie jej monomorfizmy.

**Lemat 34.** *Jeśli  $\langle S \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą w kategorii  $\mathbf{Top}$  ciągu przestrzeni skończonych  $\langle S_m \leftarrow S_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ , to kategoria  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}$  jest mała względem granicy  $\langle S \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$ .*

*Dowód.* Niech  $\langle s_n: S \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  będzie granicą ciągu  $\langle s_m^n: S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$  przestrzeni skończonych. Ustalmy zbiór skończony  $A$  oraz funkcję ciągłą  $f: S \rightarrow A$ . Z faktu 1 wynika, że wystarczy znaleźć takie  $n$ , że  $S/s_n \succ S/f$ . Przypuśćmy, że dla każdego  $n$  istnieją takie  $x_n, y_n \in S$ , że  $s_n x_n = s_n y_n$  oraz  $f x_n \neq f y_n$ . Z lematu Königa o drzewie wynika, że możemy założyć, że  $s_k x_m = s_k x_n$  oraz  $s_k y_m = s_k y_n$  dla każdego  $k \leq m, n$ . Skoro zbiór  $S$  jest skończony, to możemy również założyć, że  $f x_m = f x_n$  oraz  $f y_m = f y_n$  dla każdego  $m$  oraz  $n$ . Zatem

$$s_m^n s_n x_n = s_m x_n = s_m x_m = s_m y_m = s_m y_n = s_m^n s_n y_n$$

dla każdego  $m \leq n$ . To pokazuje, że funkcje  $\langle f_n: \{0, 1\} \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  dane wzorem

$$f_n 0 = f_n 1 = s_n x_n = s_n y_n$$

tworzą stożek nad ciągiem  $\langle s_m^n: S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$ . Stożek  $\langle s_n: S \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą, a więc istnieje dokładnie jedna taka funkcja  $h: \{0, 1\} \rightarrow S$ , że  $s_n h = f_n$  dla każdego  $n$ . Skoro funkcja  $f$  jest ciągła, zbiór  $A$  jest skończony oraz  $s_n h 0 = s_n x_n$  dla każdego  $n$ , to istnieje takie  $n$ , że  $f h 0 = f x_n$ . Podobnie,  $f h 1 = f y_n$ . Ponieważ  $f x_n \neq f y_n$ , więc  $h 0 \neq h 1$ . Niech  $p$  będzie nietrywialną permutacją zbioru  $\{0, 1\}$ . Wtedy  $f_n p = f_n$ , a więc  $s_n h p = f_n$ ; sprzeczność z jednoznacznością funkcji  $h$ .  $\square$

Scharakteryzujemy teraz te zanurzenia podzbiorów domkniętych nigdziegęstych zbioru Cantora, których obrazy również są podzbiorami nigdziegęstymi.

**Twierdzenie 35.** Załóżmy, że  $\langle s_n: 2^\omega \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą ciągu przestrzeni skończonych  $\langle S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$ , a  $\Omega: A \rightarrow 2^\omega$  jest zanurzeniem podzbioru domkniętego nigdziegęstego  $A \subset 2^\omega$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1) Obraz  $\Omega[A]$  jest nigdziegęsty w zbiorze Cantora  $2^\omega$ ,
- (2)  $\langle s_n \Omega: A \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest ciągiem Fraïsségo w kategorii  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ ,
- (3)  $\Omega: A \rightarrow 2^\omega$  ma własność  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ -przedłużania.

*Dowód.* (1) $\Rightarrow$ (2) Ustalmy zbiór skończony  $S$  oraz funkcję ciągłą  $A \rightarrow S$ . Z lematu 34 oraz z tego, że  $\Omega[A]$  jest podzbiorem domkniętym przestrzeni zwartej wynika, że istnieje takie  $n$  oraz funkcja ciągła  $S_n \rightarrow S$ , że przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Omega} & 2^\omega \\ \downarrow & & \downarrow s_n \\ S & \xleftarrow{\quad} & S_n \end{array}$$

co uzasadnia współkończowość ciągu  $\langle s_n \Omega: A \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$ .

Ustalmy strzałkę  $f: S \rightarrow S_m$  z  $s_m \Omega: A \rightarrow S_m$  do  $h: A \rightarrow S$ . Oznaczmy symbolem  $s_m^n$  strzałkę  $S_m \leftarrow S_n$  ciągu  $\langle S_m \leftarrow S_n \rangle_{m \leq n < \omega}$ . Z pierwszej części dowodu wynika, że istnieje takie  $n \geq m$ , że  $A/s_n \Omega \succ A/h$ . Skoro  $\Omega[A]$  jest podzbiorem nigdziegęstym, to dla każdego  $u \in S_n$  istnieje takie  $l \geq n$ , że

$$(s_n^l)^{-1}[\{u\}] \setminus s_l \Omega[A] \neq \emptyset.$$

Zbiory  $S_n$  oraz  $S$  są skończone, zatem istnieje takie  $l \geq n$ , że

$$|(s_n^l)^{-1}[\{u\}] \setminus s_l \Omega[A]| \geq |S|$$

dla każdego  $u \in S_n$ . Stąd dla każdego  $u \in S_n$  istnieje taka funkcja

$$f_u: (s_n^l)^{-1}[\{u\}] \setminus s_l \Omega[A] \rightarrow S,$$

że  $\text{rng } f_u = f^{-1}[\{s_m^n u\}]$ . Zatem  $f f_u = s_m^l \upharpoonright \text{dom } f_u$ . Rodzina  $A/(s_l \Omega)$  jest wpisana w  $A/h$ , a więc na mocy faktu 1 istnieje taka funkcja  $h': S_l \rightarrow S$ , że  $h' s_l \Omega = h$ . Skoro rodzina

$$\{s_l \Omega[A]\} \cup \{(s_n^l)^{-1}[\{u\}] \setminus s_l \Omega[A] : u \in S_n\}$$

jest rozłączna, to funkcja

$$g = ((h' \restriction s_l\Omega[A]) \cup \bigcup_{u \in S_n} f_u) : S_l \rightarrow S$$

jest określona poprawnie i spełnia następujące równości:

$$g \restriction s_l\Omega[A] = h' \restriction s_l\Omega[A] \text{ oraz } g \restriction \text{dom } f_u = f_u \text{ dla każdego } u \in S_n.$$

Wtedy

$$fh's_l\Omega = fh = s_m\Omega = s_m^l s_l\Omega,$$

a więc

$$fg \restriction s_l\Omega[A] = fh' \restriction s_l\Omega[A] = s_m^l \restriction s_l\Omega[A].$$

Z drugiej strony

$$fg \restriction \text{dom } f_u = ff_u = s_m^l \restriction \text{dom } f_u.$$

Zatem  $fg = s_m^l$ . Pozostaje zauważyć, że z równości  $g \restriction s_l\Omega[A] = h' \restriction s_l\Omega[A]$  wynika, że  $h = gs_l\Omega$ .

(2) $\Rightarrow$ (3) Skoro pullback w kategorii **Finset** jest również pullbackiem w kategorii **Top**, to kategoria **Finset**<sup>op</sup>/ $A$  ma własność amalgamacji. Korzystając z lematów 33 oraz 34 otrzymujemy własność **Finset**<sup>op</sup>/ $A$ -przedłużania dla  $\Omega : A \rightarrow 2^\omega$ .

(3) $\Rightarrow$ (1) Przypuśćmy, że wewnątrz obrazu  $\Omega[A]$  jest niepuste. Istnieje takie  $n$  oraz  $x \in 2^\omega$ , że  $x/s_n \subset \Omega[A]$ . Niech  $g : S_n \cup \{S_n\} \rightarrow S_n$  będzie takim przedłużeniem  $\text{id}_{S_n}$ , że  $gS_n = s_n x$ . Niech  $f = \iota s_n\Omega$ , gdzie

$$\iota : S_n \rightarrow S_n \cup \{S_n\}$$

jest włożeniem. Wtedy  $gf = s_n\Omega$ . Skoro  $\Omega : A \rightarrow 2^\omega$  ma własność **Finset**<sup>op</sup>/ $A$ -przedłużania, a kategorię **Finset**<sup>op</sup>/ $A$  rozpatrujemy jedynie z monomorfizmami, to istnieje taki monomorfizm (w kategorii **Top**<sup>op</sup>/ $A$ )  $h : 2^\omega \rightarrow S_n \cup \{S_n\}$ , że  $gh = s_n$  oraz  $h\Omega = f$ . Stąd, że  $h$  jest **Top**<sup>op</sup>/ $A$ -monomorfizmem wynika, że jest surjekcją.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Omega} & 2^\omega \\ s_n\Omega \downarrow & \swarrow s_n & \searrow f \\ S_n & \xleftarrow{g} & S_n \cup \{S_n\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow h \\ \downarrow \end{array}$$

Zatem istnieje takie  $y \in 2^\omega$ , że  $hy = S_n$ . Wtedy  $s_n y = ghy = gS_n = s_n x$ , a więc  $y \in x/s_n \subset \Omega[A]$ . Stąd

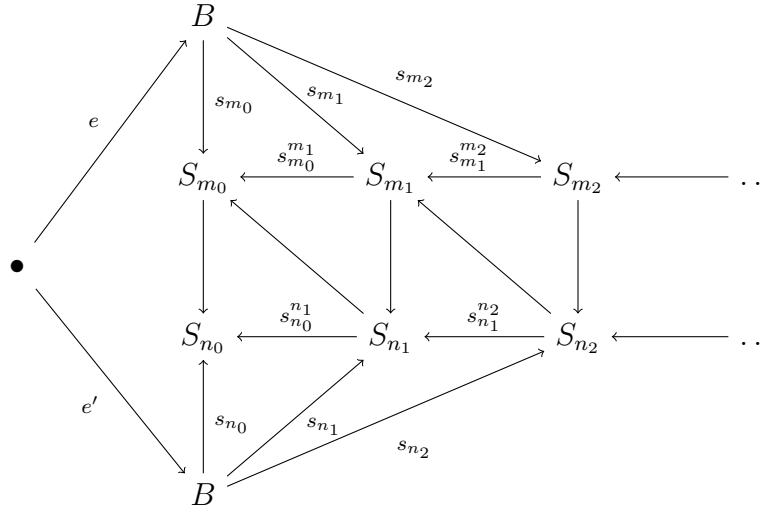
$$f\Omega^{-1}y = h\Omega\Omega^{-1}y = hy = S_n.$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ  $f\Omega^{-1}y \in S_n$ . □

Twierdzenie Knastera–Reichbacha mówi nam zatem, że warunek (1) poprzedniego twierdzenia pociąga istnienie homeomorfizmu  $2^\omega \rightarrow 2^\omega$  przedłużającego zanurzenie  $\Omega$ . Z ostatniego twierdzenia wynika więc, że każdy z warunków (2) i (3) pociąga istnienie wspomnianego przedłużenia. Pokażemy teraz jak otrzymać twierdzenie Knastera–Reichbacha wykorzystując własności ciągu Fraïsségo. Wcześniej jednak udowodnimy lemat podający warunki wystarczające do istnienia przedłużenia zanurzeń w granicę ciągu, który poprzedzimy lematem dwuistym do lematu 29.

**Lemat 36.** *Założmy, że  $\langle s_n: B \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą  $\langle s_m^n: S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$ . Wtedy dla każdych  $f, f': A \rightarrow B$ , jeśli  $s_n f = s_n f'$  dla nieskończenie wielu  $n$ , to  $f = f'$ .*

**Lemat 37.** *Założmy, że  $\langle s_n: B \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą  $\langle s_m^n: S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$ . Jeśli istnieją ciągi rosnące  $\langle m_k \rangle_{k < \omega}$ ,  $\langle n_k \rangle_{k < \omega}$  oraz diagram przemienności postaci*



to istnieje taki izomorfizm  $f: B \rightarrow B$ , że  $fe = e'$ .

*Dowód.* Założmy, że  $\langle s_n: B \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą ciągu  $\langle s_m^n: S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$ , a  $f_k, g_k$  spełniają dla każdego  $k$  następujące równości:

$$f_k g_k = s_{n_k}^{n_{k+1}} \text{ oraz } g_k f_{k+1} = s_{m_k}^{m_{k+1}}.$$

Skoro  $B$  jest granicą, to istnieją jedyne  $g, f: B \rightarrow B$  spełniające dla każdego  $k$  równości  $s_{n_k}f = f_k s_{m_k}$  oraz  $s_{m_k}g = g_k s_{n_{k+1}}$ . Zauważmy, że

$$s_{m_k}gf = g_k s_{n_{k+1}}f = g_k f_{k+1} s_{m_{k+1}} = s_{m_k}^{m_{k+1}+1} s_{m_{k+1}} = s_{m_k}$$

dla każdego  $k$ . Z lematu 36 wynika, że  $gf = \text{id}_B$ . Podobnie zauważmy, że

$$s_{n_k}fg = f_k s_{m_k}g = f_k g_k s_{n_{k+1}} = s_{n_k}^{n_{k+1}+1} s_{n_{k+1}}^\infty = s_{n_k}$$

dla każdego  $k$ , co na mocy lematu 36 pokazuje, że  $fg = \text{id}_B$ .

Zauważmy, że  $s_{n_k}fe = f_k s_{m_k}e = s_{n_k}e'$  dla każdego  $k$ , a więc na mocy lematu 36 otrzymujemy równość  $fe = e'$ .  $\square$

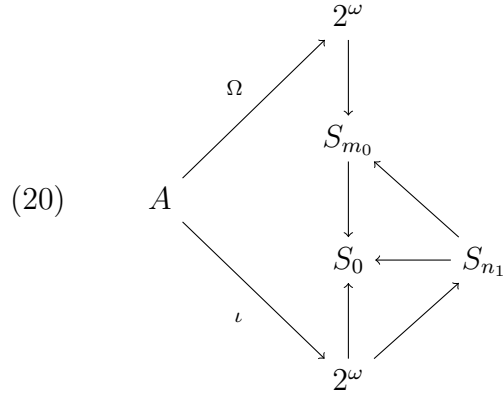
**Twierdzenie 38** (drugie sformułowanie twierdzenia Knastera–Reichbacha). *Załóżmy, że  $\langle s_n: 2^\omega \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą ciągu  $\langle S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$  przestrzeni skończonych, a  $\Omega: A \rightarrow 2^\omega$  jest zanurzeniem podzbioru domkniętego nigdziegęstego  $A \subset 2^\omega$ . Jeśli  $\langle s_n \Omega: A \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest ciągiem Fraïsségo w kategorii  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ , to istnieje taki homeomorfizm  $h: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ , że  $h \upharpoonright A = \Omega$ .*

*Dowód.* Niech  $\iota: A \rightarrow 2^\omega$  będzie włożeniem. Na mocy twierdzenia 35 ciąg  $\langle s_n \iota: A \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest ciągiem Fraïsségo w kategorii  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$ . Ze współkończowości ciągu  $\langle s_n \Omega: A \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  wynika, że istnieje takie  $m_0$  oraz surjekcja  $S_{m_0} \rightarrow S_0$ , że przemienny jest diagram

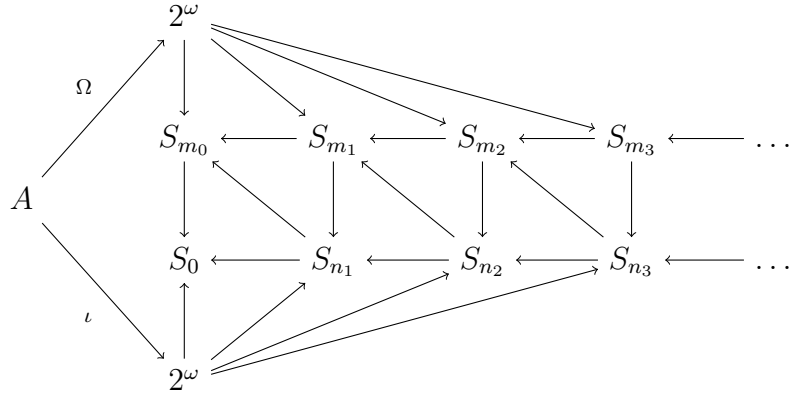
$$(19) \quad \begin{array}{ccc} & & 2^\omega \\ & \nearrow \Omega & \downarrow \\ A & & S_{m_0} \\ & \searrow \iota & \downarrow \\ & & S_0 \\ & & \uparrow \\ & & 2^\omega \end{array}$$

Z własności powracania ciągu  $\langle s_n \iota: A \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  wynika, że istnieje takie  $n_1$  oraz surjekcja  $S_{n_1} \rightarrow S_{m_0}$ , że przemienny jest diagram





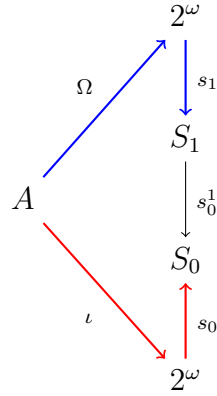
Kontynuując otrzymujemy diagram przemienny:



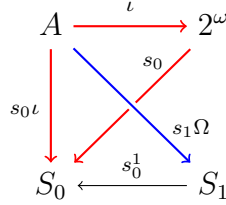
Z lematu 37 wynika, że istnieje taki homeomorfizm  $h: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ , że  $h\iota = \Omega$ , a więc  $h \upharpoonright A = \Omega$ .  $\square$

**Twierdzenie 39** (trzecie sformułowanie twierdzenia Knastera–Reichbacha).  
*Jeśli  $A$  jest podzbiorem domkniętym nigdziegęstym zbioru Cantora  $2^\omega$ , a zaimplementowanie  $\Omega: A \rightarrow 2^\omega$  ma własność **Finset**<sup>op</sup>/ $A$ -przedłużania, to istnieje taki homeomorfizm  $h: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ , że  $h \upharpoonright A = \Omega$ .*

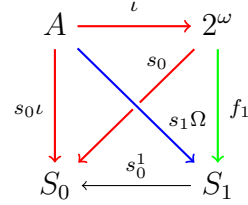
*Dowód.* Załóżmy, że  $\langle s_n: 2^\omega \rightarrow S_n \rangle_{n < \omega}$  jest granicą ciągu  $\langle s_m^n: S_n \rightarrow S_m \rangle_{m \leq n < \omega}$  oraz niech  $\iota: A \rightarrow 2^\omega$  będzie włożeniem. Bez straty ogólności możemy założyć, że  $|S_0| = 1$ . Rozważmy diagram przemienny (21).



(21)

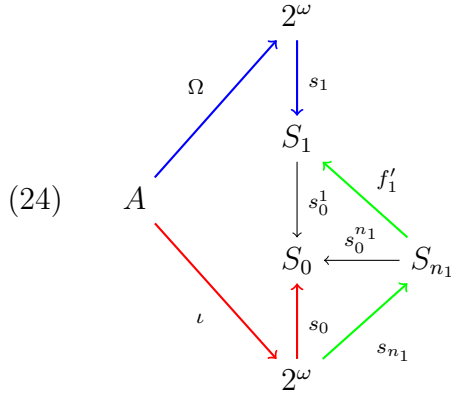


(22)

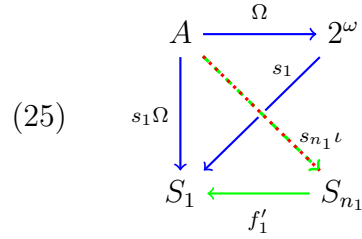


(23)

Wówczas przemienny jest diagram (22), a zatem z własności **Finset**<sup>op</sup>/ $A$ -przedłużania włożenia  $\iota: A \rightarrow 2^\omega$  (patrz twierdzenie 35) istnieje  $f_1: 2^\omega \rightarrow S_1$  takie, że przemienny jest diagram (23). Na mocy lematu 34, istnieje takie  $n_1 > 1$ , że podział zbioru  $2^\omega$  wyznaczony przez  $s_{n_1}$  jest wpisany w podział wyznaczony przez  $f_1$ . Istnieje więc również funkcja  $f'_1: S_{n_1} \rightarrow S_1$  taka, że  $f_1 = f'_1 s_{n_1}$ .



(24)



(25)

Wtedy otrzymujemy diagramy przemiennie (24) i (25). Zatem z własności **Finset**<sup>op</sup>/ $A$ -przedłużania zanurzenia  $\Omega: A \rightarrow 2^\omega$  istnieje  $g_1: 2^\omega \rightarrow S_{n_1}$  takie, że przemienny jest diagram (26). Analogicznie otrzymujemy  $m_1 > 1$  oraz  $g'_1: S_{m_1} \rightarrow S_{n_1}$  takie, że  $g_1 = g'_1 s_{m_1}$ . Przemienny jest więc również diagram (27). Kontynuując dostajemy diagram przemienny o którym mówi lemat 37, a więc istnieje taki homeomorfizm  $h: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ , że  $h\iota = \Omega$ , czyli  $h \upharpoonright A = \Omega$ .

$$(26) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Omega} & 2^\omega \\ s_1 \Omega \downarrow & \searrow s_1 & \downarrow g_1 \\ S_1 & \xleftarrow{f'_1} & S_{n_1} \end{array}$$

$$(27) \quad \begin{array}{ccccc} & & 2^\omega & & \\ & \nearrow \Omega & \downarrow s_1 & \dashrightarrow s_{m_1} & \\ A & & S_1 & \xleftarrow{s_0^{m_1}} & S_{m_1} \\ & \searrow \iota & \downarrow s_0^1 & \nwarrow f'_1 & \downarrow g'_1 \\ & & S_0 & \xleftarrow{s_0^{n_1}} & S_{n_1} \\ & & \uparrow s_0 & \nwarrow s_{n_1} & \\ & & 2^\omega & & \end{array}$$

□

Twierdzenie Knastera–Reichbacha pokazuje, że każde dwa homeomorficzne podzbiory domknięte nigdziegęste w zbiorze Cantora są tak samo położone. Omawiane w tym podrozdziale własności kategorii  $\mathbf{Finset}^{\text{op}}/A$  mogą być podstawą do formułowania subtelnych uogólnień twierdzenia Knastera–Reichbacha. Jednym z nich jest wniosek 50, o którym będzie mowa dalej.

## 7 Odwrotna (projektywna) teoria Fraïsségo

W tym rozdziale omówimy strukturę oraz podstawowe fakty dotyczące granic Fraïsségo w kontekście ciągów odwrotnych. Przypomnijmy, że pojęcie ciągu odwrotnego po raz pierwszy pojawia się w artykule [26]. W tytule artykułu [16] użyto nazwy „Projective Fraïssé limits”. W tytule artykułu [17], który dotyczy topologii, użyto nazwy „Fraïssé limit”. Także w monografii [15] omówiono ciągi odwrotne continuów metrycznych. Wzorem tej książki, w kolejnych rozdziałach przedstawiamy jedynie zarys tematyk, w zakresie których spodziewamy się uzyskać oryginalne rezultaty. Zostaną one opublikowane w artykułach wspólnych z promotorami. W istocie rzeczy, chodzi o realizację idei, aby zbudować aksjomatyczną teorię granic Fraïsségo, a następnie na jej gruncie dowodzić twierdzenia topologiczne. W każdym szczególnym przypadku może skutkować to dowodem, korzystającym z narzędzi teorii granic Fraïsségo. Następnie będzie podejmowana próba uzyskania takiego samego rezultatu innymi metodami. W końcu nastąpi porównanie takich podejść. Ten ostatni etap niekoniecznie będzie faworyzował teorię granic Fraïsségo. W moim przekonaniu, tak stało się w przypadku Cantorwala, co opisujemy w artykule [6] oraz skomentowane w podrozdziale 4.1.

### 7.1 Niektóre konsekwencje Corollary 3.8 z artykułu W. Kubicia [21]

Niech  $\mathbf{C}$  będzie ustaloną kategorią. Mówimy, że kategoria  $\mathbf{C}$  ma *własność amalgamacji odwrotnej* — wspomnieliśmy o tym pojęciu w podrozdziale 5.3 — jeśli dla każdych  $\mathbf{C}$ -strzałek  $f, g$  o tej samej przeciwdziedzinie istnieją  $\mathbf{C}$ -strzałki  $f', g'$  takie, że  $gf' = fg'$  (w szczególności  $f', g'$  mają te same dziedziny). Mówimy, że kategoria  $\mathbf{C}$  jest *skierowana odwrotnie* jeśli dla każdych  $X, Y \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  istnieją  $Z \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  oraz  $\mathbf{C}$ -strzałki  $f: Z \rightarrow X, g: Z \rightarrow Y$ . W języku stożków mówimy, że kategoria jest skierowana odwrotnie, gdy każdy diagram postaci

$$\bullet \quad \bullet$$

ma stożek nad sobą. Pojęcia  $\mathbf{C}$ -strzałki oraz  $\mathbf{C}$ -morfizmu są synonimami, które używamy zamiennie. Nazwa  $\mathbf{C}$ -strzałka jest naturalna z powodu ilustracji graficznych. Czasami rozpatrujemy strzałki o specyficznych własnościach, a wtedy nazwa morfizm jest stosowniejsza, np. epimorfizm, mono-

morfizm itd.<sup>2</sup> Mówimy, że kategoria  $\mathbf{C}$  jest istotnie przeliczalna jeśli ma, z dokładnością do izomorfizmu, przeliczalnie wiele obiektów oraz dla każdych  $X, Y \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  zbiór  $\mathbf{C}(X, Y)$  wszystkich morfizmów z  $X$  do  $Y$  jest przeliczalny. Kategoria  $\mathbf{C}$  jest kategorią odwrotną Fraïsségo jeśli:

- (OF1)  $\mathbf{C}$  jest skierowana odwrotnie,
- (OF2)  $\mathbf{C}$  ma własność amalgamacji odwrotnej,
- (OF3)  $\mathbf{C}$  jest istotnie przeliczalna.

Założmy teraz, że  $\mathbf{D}$  jest podkategorią pełną większej kategorii  $\mathbf{C}$ , która spełnia następujące warunki:

- (L0) Wszystkie  $\mathbf{C}$ -strzałki są epimorfizmami.
- (L1) Każdy ciąg odwrotny w  $\mathbf{D}$  ma granicę w  $\mathbf{C}$ .
- (L2) Każdy  $\mathbf{C}$ -obiekt jest granicą pewnego ciągu odwrotnego  $\mathbf{D}$ -obiektów.
- (L3) Dla każdego ciągu odwrotnego  $\mathbf{D}$ -obiektów

$$D_0 \leftarrow D_1 \leftarrow D_2 \leftarrow \dots$$

o granicy  $D$  w kategorii  $\mathbf{C}$  oraz dla każdego  $\mathbf{D}$ -obiektu  $A$  i  $\mathbf{C}$ -strzałki  $D \rightarrow A$  istnieje takie  $n$  oraz  $\mathbf{D}$ -strzałka  $D_n \rightarrow A$  taka, że przemienny jest następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \nearrow & \\ D_n & & \end{array}$$

(porównaj z pojęciem ze str. 65  $\mathbf{D}$  jest mała względem kogranicy). Mówimy, że  $\mathbf{C}$ -obiekt  $U$  jest  $\mathbf{D}$ -generyczny, gdy:

- (G1) Dla każdego  $\mathbf{D}$ -obiektu  $A$  istnieje  $\mathbf{C}$ -strzałka  $U \rightarrow A$ .
- (G2) Dla każdej  $\mathbf{D}$ -strzałki  $A' \rightarrow A$  oraz dla każdej  $\mathbf{C}$ -strzałki  $U \rightarrow A$  istnieje  $\mathbf{C}$ -strzałka  $U \rightarrow A'$  taka, że przemienny jest następujący diagram:

---

<sup>2</sup>W monografii Mac Lane'a [27] używana jest „strzałka” — *arrow* w miejsce „morfizmu”.

$$\begin{array}{ccc}
U & \longrightarrow & A \\
\downarrow & \nearrow & \\
A' & & 
\end{array}$$

Każdy obiekt spełniający warunek (G2) nazywamy **D-projektywnym** (porównaj z własnością ze str. 65 **D**-przedłużania). Obiekty spełniające warunek (G1) bywają nazywane **D-uniwersalnymi projektywnie**.

Jeśli **D** ma obiekt słabo końcowy, to (G1) jest konsekwencją (G2). Istotnie, jeśli  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$  oraz  $f: A \rightarrow T$  jest **D**-strzałką taką, że  $T$  jest obiektem słabo końcowym to ponieważ (L2) istnieją  $A' \in \text{Ob}_{\mathbf{D}}$ , **C**-strzałka  $j: A' \rightarrow Y$ , oraz **D**-strzałka  $g: A' \rightarrow T$ . Używając (G2) znajdziemy **C**-strzałkę  $h: U \rightarrow A$  spełniającą ponadto  $gj = fh$ .

Następujące fakty są konsekwencjami [21, Cor. 3.8] (porównaj twierdzenie 31) zastosowanego do kategorii odwrotnej do **D**.

**Twierdzenie 40.** *Założmy, że kategorie  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  spełniają warunki (L0)–(L3) oraz **D** jest kategorią odwrotną Fraïsségo. Wówczas w **C** istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, obiekt **D**-generyczny.*  $\square$

**Twierdzenie 41.** *Założmy, że kategorie  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  spełniają warunki (L0)–(L3) oraz **C**-obiekt  $U$  jest **D**-generyczny. Wówczas:*

- $U$  jest obiektem słabo początkowym w kategorii **C**.
- Dla każdego **D**-obektu  $A$ , każdej pary strzałek  $p, q: U \rightarrow A$  istnieje automorfizm  $h: U \rightarrow U$  spełniający warunek  $q = ph$ .  $\square$

Pierwsza z powyższych własności nazywana jest *uniwersalnością projektywną*, a druga nazywana jest *jednorodnością projektywną*. Ostatnio opublikowano artykuł [4], w którym przedstawiono analogiczne rozważania.

## 8 Jakie zagadnienia topologiczne mogą być badane na gruncie teorii kategorii?

W artykule [16] zademonstrowano, że znane właściwości pseudo-łuku można opisać w języku granic Fraïsségo. W artykule [4] analogiczne metody zastosowano do *continuum*, które jest nazywane *Lelek fan*. Również w [24] autorzy stosują bezpośrednio teorię Fraïsségo do *Lelek fan* i *Poulsen simplex*.

W trakcie badań związanych z moją rozprawą doktorską także udało mi się uzyskać wyniki, które są interesujące same w sobie oraz mogą być wykorzystane w dalszych badaniach naukowych. Niektóre takie fakty prezentuję poniżej, pomijając detale.

## 8.1 Kategoria $\ddagger\mathbf{C}$

Ustalmy kategorię  $\mathbf{C}$ . Definiujemy taką kategorię  $\ddagger\mathbf{C}$ , że  $\text{Ob}_{\ddagger\mathbf{C}} = \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ , natomiast morfizm  $f: X \rightarrow Y$  jest parą  $\langle e, r \rangle$  strzałek w  $\mathbf{C}$  taką, że

$$e: X \rightarrow Y, r: Y \rightarrow X \text{ oraz } re = \text{id}_X.$$

Kładziemy  $e(f) = e$  oraz  $r(f) = r$  zatem  $f = \langle e(f), r(f) \rangle$ . Biorąc morfizmy  $f: X \rightarrow Y$  oraz  $g: Y \rightarrow Z$  w kategorii  $\ddagger\mathbf{C}$ ,

$$X \xleftarrow{r(f)} Y \xleftarrow{r(g)} Z$$

$$X \xrightarrow{e(f)} Y \xrightarrow{e(g)} Z$$

definiujemy ich złożenie w oczywisty sposób:

$$gf = \langle e(g)e(f), r(f)r(g) \rangle.$$

Oczywiście i w tym przypadku operacja składania jest łączną na składalnych strzałkach. Obiekt  $A \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$  wyznacza identyczność  $\langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle$  w kategorii  $\ddagger\mathbf{C}$ . Zatem  $\ddagger\mathbf{C}$  jest rzeczywiście kategorią. Odnotujmy, że  $f \mapsto e(f)$  definiuje kowariantny funktor  $e: \ddagger\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  oraz  $f \mapsto r(f)$  definiuje kontrawariantny funktor  $r: \ddagger\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ . Kategorię  $\ddagger\mathbf{C}$  nazywamy *kategorią par zanurzenie-projekcja* (krótko *ZP-par*). Przypominamy, że warunek  $re = \text{id}_X$  oznacza, iż  $e$  jest monomorfizmem tzn. morfizmem spełniającym prawo lewostronnego skracania natomiast  $r$  jest epimorfizmem tzn. morfizmem spełniającym prawo prawostronnego skracania. Pomysł rozważania ZP-par zmierza do wykorzystania specjalnych ciągów Fraïsségo. Mianowicie, chcielibyśmy otrzymać jedyny, współkońcowy obiekt  $U$  taki, że każdy inny  $X$ , można zarówno zanurzyć w  $U$  oraz otrzymać jako rzut  $U$ . Innymi słowy, chcielibyśmy mieć strzałki  $e: X \rightarrow U$  oraz  $r: U \rightarrow X$  spełniające  $re = \text{id}_X$ .

## 8.2 Właściwe i semiwłaściwe amalgamacje

Niech  $f: Z \rightarrow X$  oraz  $g: Z \rightarrow Y$  będą strzałkami w kategorii  $\ddagger\mathbf{C}$ . Mówimy, że para  $\langle f, g \rangle$  strzałek ma własność *amalgamacji właściwej* jeśli  $hf = kg$

i dodatkowo zachodzi

$$e(g)r(f) = r(k)e(h) \text{ oraz } e(f)r(g) = r(h)e(k)$$

dla pewnych  $h: X \rightarrow W$  oraz  $k: Y \rightarrow W$ . Dokładniej w języku kategorii  $\mathbf{C}$ , oznacza to, że następujące cztery diagramy komutują:

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{e(k)} & Y \\ \uparrow e(h) & & \uparrow e(g) \\ X & \xleftarrow{e(f)} & Y \end{array} & \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r(k)} & Y \\ \downarrow r(h) & & \downarrow r(g) \\ X & \xrightarrow{r(f)} & Y \end{array} & \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r(k)} & Y \\ \uparrow e(h) & & \uparrow e(g) \\ X & \xrightarrow{r(f)} & Y \end{array} & \begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{e(k)} & Y \\ \downarrow r(h) & & \downarrow r(g) \\ X & \xleftarrow{e(f)} & Y \end{array} \end{array}$$

Strzałki  $\hookrightarrow$  oraz  $\twoheadrightarrow$  oznaczają odpowiednio monomorfizmy oraz epimorfizmy. Powiemy, że  $\mathbf{C}$  ma własność *amalgamacji właściwej* jeśli każda para strzałek w  $\mathbf{C}$  o wspólnej dziedzinie ma własność amalgamacji właściwej w  $\mathbf{C}$ . Mówimy, że para  $\langle f, g \rangle$  strzałek ma własność *amalgamacji semiwłaściwej* jeśli  $hf = kg$  i dodatkowo zachodzi przynajmniej jedna z równości

$$e(g)r(f) = r(k)e(h) \text{ lub } e(f)r(g) = r(h)e(k)$$

dla pewnych  $h: X \rightarrow W$  oraz  $k: Y \rightarrow W$ .

### 8.3 Kategoria porządków liniowych skończonych

Rozważmy następującą kategorię  $\mathbf{S}$ :

- Obiektami są pary  $\langle S, S_0 \rangle$ , gdzie  $S$  i  $S_0$  to zbiory niepuste, skończone oraz  $S_0 \subset S$ .
- Strzałką pomiędzy obiektami  $\langle S, S_0 \rangle$  oraz  $\langle T, T_0 \rangle$  jest  $ZP$ -para  $\langle e, p \rangle$  takich odwzorowań, że  $e: S \hookrightarrow T$ ,  $p: T \twoheadrightarrow S$ ,  $pe = \text{id}_S$  oraz  $e[S_0] \subset T_0$ . Odwzorowanie  $e$  będzie nazywane *zanurzeniem* (jest ono rzeczywiście różnowartościowe), natomiast  $p$  będzie nazywane *projekcją*. Złożenie strzałek jest zdefiniowane w oczywisty sposób.

Dalej będziemy również rozważać liniowy wariant  $\mathbf{S}$  oznaczany przez  $\mathbf{S}_{\leq}$ , gdzie obiekty są parami  $\langle S, S_0 \rangle$ , przy czym  $S$  jest niepustym, skończonym liniowo uporządkowanym zbiorem,  $S_0 \subset S$ , a o wszystkich odwzorowaniach zakłada się, że są rosnące (tzn. zachowują porządek).



$$\begin{array}{ccc}
S_0 & \xrightarrow{\iota_S} & S \\
e \downarrow & & \uparrow p \downarrow e \\
T_0 & \xrightarrow{\iota_T} & T
\end{array}$$

Okazuje się że kategoria  $\mathbf{S}$ :

- ma własność amalgamacji,
- jest skierowana (wynika to z własności amalgamacji oraz istnienia obiektu słabo początkowego — jest nim para zbiorów jednopunktowych o tym samym elemencie),
- kategoria  $\mathbf{S}$  jest zdominowana przez podkategorię  $\mathbf{S}_1$ , gdzie

$$\text{Ob } \mathbf{S}_1 = \{\langle S, S_0 \rangle \in \text{Ob } \mathbf{S} : S_0 = S\}$$

oraz dla dowolnych  $A, B \in \text{Ob } \mathbf{S}_1$  zakładamy, że  $\mathbf{S}_1(A, B) = \mathbf{S}(A, B)$ , tzn.  $\mathbf{S}_1$  jest podkategorią pełną kategorii  $\mathbf{S}$ . Ze względu na ostatnie założenie aby udowodnić dominowanie kategorii  $\mathbf{S}_1$ , wystarczy pokazać warunek (D1). W tym celu ustalmy  $\langle S, S_0 \rangle \in \text{Ob } \mathbf{S}$ . Wtedy pomiędzy tym obiektem a  $\langle S, S \rangle$  istnieje strzałka w kategorii  $\mathbf{S}$ :

$$\langle S_0, S \rangle \xrightleftharpoons[\text{id}_S]{\text{id}_S} \langle S, S \rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
S_0 & \xrightarrow{\iota_S} & S \\
\text{id}_{S_0} \downarrow & & \uparrow \text{id}_S \downarrow \text{id}_S \\
S & \xrightarrow{\text{id}_S} & S
\end{array}$$

Zatem kategoria  $\mathbf{S}$  ma ciąg Fraïsségo na mocy twierdzenia 31.

Kategoria  $\mathbf{S}_{\leq}$  również ma ciąg Fraïsségo, jednak aby się o tym przekonać udowodnimy dodatkowe własności tej kategorii.

Dodajmy jeszcze następujące stwierdzenia.

**Stwierdzenie 42.** Załóżmy, że  $X$  oraz  $Z$  są skończonymi liniowymi porządkami. Jeśli  $Z_0 \subset Z$ ,  $X_0 \subset X$ ,  $e: Z \rightarrow X$  oraz  $r: X \rightarrow Z$  są homomorfizmami,  $re = \text{id}_Z$  oraz  $e[Z_0] \subset X_0$ , to istnieje liniowy porządek  $X'$  oraz izomorfizm  $e': X \rightarrow X'$  taki, że  $e'e: Z \rightarrow X'$  jest rosnącym włożeniem,  $Z_0 \subset e'[X_0]$  oraz  $r(e')^{-1} \upharpoonright Z = \text{id}_Z$ . Ponadto, jeśli  $Z \subset \mathbb{Q}$  oraz porządek  $Z$  jest dziedziczony z  $\mathbb{Q}$ , to  $X'$  można wybrać tak aby  $X' \subset \mathbb{Q}$  oraz porządek  $X'$  również był dziedziczony z  $\mathbb{Q}$ .

*Dowód.* Zdefiniujmy

$$X' = Z \cup ((X \setminus e[Z]) \times \{Z\})$$

oraz  $e': X \rightarrow X'$  następująco:

$$e'x = \begin{cases} e^{-1}x, & \text{jeśli } x \in e[Z], \\ \langle x, Z \rangle, & \text{jeśli } x \notin e[Z]. \end{cases}$$

Pokażemy, że  $e'$  jest injekcją. Ustalmy  $x \in e[Z]$  oraz  $x' \notin e[Z]$  takie, że  $e^{-1}x = \langle x', Z \rangle$ . Wówczas  $Z \in \{x', Z\} \in \langle x', Z \rangle = e^{-1}x \in Z$ , co jest sprzeczne z aksjomatem regularności.

Pokażemy, że  $e'$  jest surjekcją. Ustalmy  $z \in Z$ . Wówczas  $e'ez = z$  (to również pokazuje, że  $e'e$  jest włożeniem). Ustalmy  $\langle x, Z \rangle \in (X \setminus e[Z]) \times \{Z\}$ . Wówczas  $e'x = \langle x, Z \rangle$ .

Ustalmy  $z \in Z_0$ . Wówczas  $z = e'ez \in e'[X_0]$ , ponieważ  $ez \in X_0$ .

Zdefiniujmy  $r' = r(e')^{-1}$ . Ustalmy  $z \in Z$ . Wówczas

$$r'z = r(e')^{-1}z = r(e')^{-1}e'ez = rez = z.$$

Niech  $X'$  będzie uporządkowany przez relację:

$$x \leq y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (e')^{-1}x \leq (e')^{-1}y.$$

□

**Stwierdzenie 43.** Kategoria  $\mathbf{S}_{\leq}$  ma własność amalgamacji.

*Dowód.* Ustalmy podzbiory skończone  $X, X_0, Y, Y_0, Z, Z_0 \subset \mathbb{Q}$  i załóżmy, że  $Z_0 \subset Z \subset X \cap Y$ ,  $Z_0 \subset X_0 \subset X$  oraz  $Z_0 \subset Y_0 \subset Y$ . Niech  $Z = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$  będzie takim przedstawieniem, że  $z_0 < \dots < z_{n-1}$ . Załóżmy, że odwzorowania  $r_X: X \rightarrow Z$ ,  $r_Y: Y \rightarrow Z$  są rzutowaniami takimi, że  $r_X \upharpoonright Z = r_Y \upharpoonright Z = \text{id}_Z$ . Dla każdego  $i < n$  wybieramy  $t_i, s_i \in \mathbb{Q}$ , tak aby

$$\max([z_i, z_{i+1}] \cap r_X^{-1}[\{z_i\}]) < t_i < \min([z_i, z_{i+1}] \cap r_X^{-1}[\{z_{i+1}\}])$$

oraz

$$\max([z_i, z_{i+1}] \cap r_Y^{-1}[\{z_i\}]) < s_i < \min([z_i, z_{i+1}] \cap r_Y^{-1}[\{z_{i+1}\}]).$$

Dla każdego  $i < n - 1$  istnieje bijekcja rosnąca  $\phi_i: [z_i, z_{i+1}] \rightarrow [z_i, z_{i+1}]$  taka, że  $\phi_i t_i = s_i$ . Wystarczy rozważyć następującą funkcję:

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{z_i - s_i}{z_i - t_i}(x - z_i) + z_i, & \text{jeśli } x \leq t_i, \\ \frac{z_{i+1} - s_i}{z_{i+1} - t_i}(x - z_{i+1}) + z_{i+1}, & \text{jeśli } x \geq t_i. \end{cases}$$

Następnie definiujemy  $\phi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ :

$$\phi x = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \notin [z_0, z_{n-1}], \\ \phi_i x, & \text{jeśli } x \in [z_i, z_{i+1}] \text{ dla pewnego } i < n - 1. \end{cases}$$

Wówczas  $\phi$  jest bijekcją rosnącą taką, że

$$\phi z_i = z_i \text{ oraz } \phi t_i = s_i \text{ dla każdego } i < n.$$

Definiujemy

$$W = W_0 = X \cup \phi^{-1}[Y],$$

$e': Y \rightarrow W$  jako  $e'y = \phi^{-1}y$  oraz  $r': W \rightarrow Y$  następująco:

$$r'w = \begin{cases} \sup_Y(-\infty, \phi w)_Y, & \text{jeśli } w > z_{n-1} \text{ lub } w \in [z_i, t_i] \text{ dla pewnego } i, \\ \inf_Y[\phi w, \infty)_Y, & \text{jeśli } w < z_0 \text{ lub } w \in [t_i, z_{i+1}] \text{ dla pewnego } i. \end{cases}$$

Otrzymujemy, że  $e'z = \phi^{-1}z = z$  dla wszystkich  $z \in Z$ , co dowodzi przemienności diagramu zanurzeń.

Pokażemy, że  $r'$  jest funkcją rosnącą. Ustalmy  $x, x' \in W$  takie, że  $x \leq x'$ . Wówczas  $\phi x \leq \phi x'$ , stąd  $(-\infty, \phi x]_Y \subset (-\infty, \phi x']_Y$ ,  $[\phi x', \infty)_Y \subset [\phi x, \infty)_Y$ ,  $\sup_Y(-\infty, \phi x]_Y \leq \sup_Y(-\infty, \phi x']_Y$  oraz  $\inf_Y[\phi x, \infty)_Y \leq \inf_Y[\phi x', \infty)_Y$ . Tak więc w przypadkach:

- $x, x' > z_{n-1}$  lub
- $x \in [z_i, t_i]$  i  $x' > z_{n-1}$  lub
- $x \in [z_i, t_i]$  i  $x' \in [z_j, t_j]$  lub
- $x < z_0$  i  $x' \in [t_i, z_{i+1}]$  lub
- $x, x' < z_0$  lub
- $x \in [t_i, z_{i+1}]$  i  $x' \in [t_j, z_{j+1}]$ ,

otrzymujemy  $r'x \leq r'x'$ . Zauważmy, że

$$x \in [z_i, t_i] \text{ oraz } x' \in [t_j, z_{j+1}]$$

jest jedynym przypadkiem, który pozostał do rozważenia. Jeśli  $j < i$ , to  $x' \leq z_{j+1} \leq z_i \leq x$ , stąd  $x' = x$  i  $r'x = r'x'$ . Załóżmy, że  $i \leq j$ . Wówczas  $t_i \leq t_j$ , stąd

$$r'x \leq \phi x \leq \phi t_i \leq \phi t_j \leq \phi x' \leq r'x'.$$

Pokażemy, że  $r'e' = \text{id}_Y$ . Ustalmy  $y \in Y$ . Wówczas

$$(-\infty, \phi\phi^{-1}y)_Y = (-\infty, y)_Y \text{ oraz } [\phi\phi^{-1}y, \infty)_Y = [y, \infty)_Y,$$

stąd

$$\sup_Y(-\infty, \phi\phi^{-1}y)_Y = y \text{ oraz } \inf_Y[\phi\phi^{-1}y, \infty)_Y = y.$$

Zatem  $r'e'y = r'\phi^{-1}y = y$ .

Definiujemy  $r_W: W \rightarrow X$  następująco:

$$r_W w = \begin{cases} \sup_X(-\infty, w)_X, & \text{jeśli } w > z_{n-1} \text{ lub } w \in [z_i, t_i] \text{ dla pewnego } i, \\ \inf_X(w, \infty)_X, & \text{jeśli } w < z_0 \text{ lub } w \in [t_i, z_{i+1}] \text{ dla pewnego } i. \end{cases}$$

Dowód monotoniczności  $r_W$  jest analogiczny do dowodu monotoniczności  $r'$ .

Pokażemy przemienność diagramu projekcji. Ustalmy  $w \in W$ . Rozważmy przypadek  $w < z_0$ . Wówczas  $r_X r_W w \leq r_X r_W z_0 = r_X z_0 = z_0$ . Ponieważ  $r_X r_W w \in Z$  oraz  $z_0 = \min Z$  otrzymujemy  $r_X r_W w = z_0$ . Zauważmy, że  $\phi w \leq \phi z_0 = z_0$ , stąd  $r'w \leq z_0$  oraz  $r_Y r'w \leq r_Y z_0 = z_0$ . Zatem

$$r_Y r'w = z_0 = r_X r_W w.$$

Rozważmy przypadek  $w \in [z_i, t_i]$ . Wówczas  $r_X r_W w = z_i$ . Zauważmy, że  $z_i = r'z_i \leq r'w \leq \phi w \leq \phi t_i = s_i$ , stąd  $r_Y r'w = z_i$ .

Rozważmy przypadek  $w \in [t_i, z_{i+1}]$ . Wówczas  $r_X r_W w = z_{i+1}$ . zauważmy, że  $z_{i+1} = r'z_{i+1} \geq r'w \geq \phi w \geq \phi t_i = s_i$ , stąd  $r_Y r'w = z_{i+1}$ .

Przypadek  $w > z_{n-1}$  jest analogiczny do przypadku  $w < z_0$ .

Ustalmy zanurzenia  $e_X: Z \rightarrow X$ ,  $e_Y: Z \rightarrow Y$  oraz projekcje  $r_X: X \rightarrow Z$ ,  $r_Y: Y \rightarrow Z$  takie, że  $r_X e_X = r_Y e_Y = \text{id}_Z$ . Istnieją zanurzenia  $f_X: X \rightarrow \mathbb{Q}$  oraz  $f_Y: Y \rightarrow \mathbb{Q}$ . Zauważmy, że  $f_Y e_Y (f_X e_X)^{-1} \upharpoonright f_X e_X Z: f_X e_X Z \rightarrow f_Y e_Y Z$  jest izomorfizmem. Ponieważ  $f_X e_X Z, f_Y e_Y Z \subset \mathbb{Q}$ , więc z faktu, że każdy izomorfizm liniowy pomiędzy podzbiorami skończonymi liczb wymiernych

ma rozszerzenie do automorfizmu całego zbioru, wynika istnienie izomorfizmu  $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  takiego, że  $h \upharpoonright f_X e_X Z = f_Y e_Y (f_X e_X)^{-1} \upharpoonright f_X e_X Z$ . Zdefiniujemy

$$r_{X'} = f_X e_X r_X f_X^{-1} \text{ oraz } r_{Y'} = f_X e_X (f_Y e_Y)^{-1} h.$$

Wówczas  $r_{X'} \upharpoonright f_X e_X Z = r_{Y'} \upharpoonright f_X e_X Z = \text{id}_{f_X e_X Z}$ . Z pierwszej części dowodu istnieje skończony liniowy porządek  $W$ , zanurzenie  $e': X' \rightarrow W$ , projekcje  $r': W \rightarrow X'$ ,  $r_W: W \rightarrow h^{-1}[Y']$  takie, że  $r'e' = \text{id}_{X'}$ ,  $r_W \upharpoonright h^{-1}[Y'] = \text{id}_{h^{-1}[Y']}$ ,  $r_{X'}r' = r_{Y'}r_W$  oraz  $e' \upharpoonright f_X e_X Z = \text{id}_{f_X e_X Z}$ .

Zauważmy, że  $e'f_X: X \rightarrow W$ ,  $f_X^{-1}r': W \rightarrow X$ ,  $h^{-1}f_Y: Y \rightarrow W$  oraz  $f_Y^{-1}hr_W: W \rightarrow Y$  spełniają następujące równości:

$$f_X^{-1}r'e'f_X = \text{id}_X, \quad f_Y^{-1}hr_W h^{-1}f_Y = \text{id}_Y,$$

$$e'f_X e_X z = h^{-1}f_Y e_Y (f_X e_X)^{-1} f_X e_X z = h^{-1}f_Y e_Y z,$$

$$\begin{aligned} r_X f_X^{-1} r' w &= (f_X e_X)^{-1} f_X e_X r_X f_X^{-1} r' w = (f_X e_X)^{-1} r_{X'} r' w = \\ &= (f_X e_X)^{-1} r_{Y'} r_W w = (f_X e_X)^{-1} f_X e_X (f_Y e_Y)^{-1} h r_W w = \\ &= (f_Y e_Y)^{-1} h r_W w = e_Y^{-1} f_Y^{-1} h r_W w = r_Y f_Y^{-1} h r_W w. \end{aligned}$$

□

Omówimy jak interpretować  $\sigma\mathbf{S}$ . Mianowicie, jeśli weźmiemy pod uwagę ciąg

$$\vec{X} = \langle \langle X_m, (X_m)_0 \rangle \leftarrow \langle X_n, (X_n)_0 \rangle \rangle_{m \leq n < \omega}$$

w  $\mathbf{S}$ , to naturalnym jest rozważać granicę  $X^\infty$  ciągu odwrotnego  $\langle X_n \rangle_{n < \omega}$  z odpowiednimi surjekcjami — jako zwartą, zerowymiarową przestrzeń metryczną. Ponadto można rozważać także ciąg prosty  $\langle (X_n)_0 \rangle_{n < \omega}$  razem z odpowiednimi zanurzeniami. Oznaczmy przez  $(X_0)_\infty$  jego granicę prostą, która może być postrzegana jako suma wszystkich zbiorów  $(X_n)_0$ , jeśli o każdym zanurzeniu założymy, że jest inkluzją. Ponieważ zanurzenia komutują z projekcjami, istnieje różnowartościowe odwzorowanie z  $(X_0)_\infty$  w  $X^\infty$ . Podsumowując, możemy z każdym ciągiem  $\vec{X}$  kojarzyć parę  $\langle X^\infty, (X_0)_\infty \rangle$ , gdzie  $X^\infty$  jest zwartą zerowymiarową metryczną przestrzenią oraz  $(X_0)_\infty$  jest przeliczalnym podzbiorem  $X^\infty$ . Będziemy mówić, że para  $\langle X^\infty, (X_0)_\infty \rangle$ , jest *granicą stowarzyszoną* z ciągiem  $\vec{X}$ .

**Stwierdzenie 44.** *Niech  $K$  będzie przestrzenią zwartą zerowymiarową metryzowalną. Wówczas dla każdego podzbioru przeliczalnego  $A \subset K$  para  $\langle K, A \rangle$  jest granicą stowarzyszoną z pewnym ciągiem w kategorii  $\mathbf{S}$ .*

*Dowód.* Ustalmy parę  $\langle K, A \rangle$ , gdzie  $K$  jest zwartą zerowymiarową przestrzenią metryzowalną oraz  $A \subset K$  jest podzbiorem przeliczalnym. Ponumerujmy elementy zbioru  $A$  następująco  $A = \langle a_n \rangle_{n < \omega}$ . Załóżmy, że  $A$  jest zbiorem nieskończonym a jego numeracja jest różnowartościowa.

Konstruujemy indukcyjnie ciąg rozbić  $\langle \mathcal{R}_n \rangle_{n < \omega}$  przestrzeni  $K$  na podzbiory domknięto-otwarte spełniający następujące warunki:

- $\mathcal{R}_n = \{U_{n,i} : 1 \leq i \leq k_n\} \cup \{U_{n,a_j} : j \leq n\}$  dla każdego  $n < \omega$ ,
- dla każdego  $n$  oraz  $U \in \mathcal{R}_n$  istnieje co najwyżej jeden taki indeks  $i \leq n$ , że  $a_i \in U$ ,
- $a_j \in U_{n,a_j}$  dla każdego  $n$  oraz  $j \leq n$ ,
- dla każdego  $n$  oraz  $j \leq n$  oraz  $0 < i \leq k_n$  średnice podzbiorów  $U_{n,a_j}$  oraz  $U_{n,i}$  są mniejsze niż  $\frac{1}{n+1}$ ,
- dla każdego  $n$  rozbiecie  $\mathcal{R}_{n+1}$  jest wpisany w rozbiecie  $\mathcal{R}_n$ .

Definiujemy

$$S_n = \{x_{n,i} : 1 \leq i \leq k_n\} \cup \{a_j : j \leq n\} \text{ oraz } A_n = \{a_j : j \leq n\},$$

gdzie  $x_{n,i}$  jest ustalonym elementem podzbioru  $U_{n,i}$ .

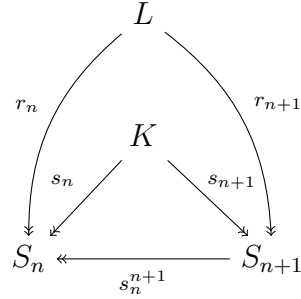
Definiujemy funkcję  $s_n : K \rightarrow S_n$  następująco: jeśli  $x \in U \in \mathcal{R}_n$ , to  $s_n x$  jest jedynym elementem zbioru  $S_n \cap U$ . Wtedy  $s_n^{-1}[\{s\}] \in \mathcal{R}_n$  oraz  $s_n s = s$  dla każdego  $s \in S_n$ . Niech  $e^n : S_n \rightarrow K$  będzie włożeniem. Wówczas para  $\langle e^n, s_n \rangle$  jest **S**-strzałką. Istnieje dokładnie jedna **S**-strzałka  $\langle e_{n+1}^n, s_n^{n+1} \rangle$  spełniająca warunek

$$s_n = s_n^{n+1} s_{n+1} \text{ oraz } e^n = e^{n+1} e_{n+1}^n.$$

W ten sposób definiujemy ciąg  $\vec{X} = \langle S_n, A_n \rangle_{n < \omega}$  razem z odwzorowaniami wiążącymi  $\langle e_{n+1}^n, s_n^{n+1} \rangle$ :

- funkcja  $e_{n+1}^n : S_n \rightarrow S_{n+1}$  jest włożeniem,
- funkcja  $s_n^{n+1} : S_{n+1} \rightarrow S_n$  spełnia warunki:
  - $s_n^{n+1} x_{n+1,i} = x_{n,j_i}$  o ile  $x_{n+1,i} \in U_{n+1,i} \subset U_{n,j_i}$  oraz  $j_i \leq k_n$ ,
  - $s_n^{n+1} a_i = a_i$  dla  $i \leq n$ ,
  - $s_n^{n+1} a_{n+1} = a_m$  o ile  $a_{n+1} \in U_{n+1,a_{n+1}} \subset U_{n,a_m}$  oraz  $m \leq n$ .

Rozważmy diagram:



gdzie  $L$  jest zwartą zerowymiarową przestrzenią metryzowalną oraz rodzina morfizmów  $\langle r_n \rangle_{n < \omega}$  spełnia warunek

$$r_n = s_n^{n+1} r_{n+1}.$$

Istnieje dokładnie jeden morfizm  $f: L \rightarrow K$  taki, że

$$s_k f = r_k \text{ dla każdego } k < \omega.$$

Istotnie, ustalmy  $x \in L$ . Wówczas ciąg  $\langle r_n x \rangle_{n < \omega}$  jest zbieżny w  $K$ . Definiujemy

$$fx = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n x.$$

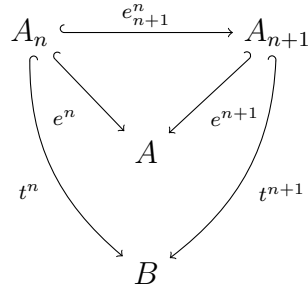
Pokażemy, że funkcja  $f$  jest ciągła. Ustalmy  $x \in L$ ,  $n < \omega$  oraz takie  $U \in \mathcal{U}_n$ , że  $fx \in U$ . Istnieje takie  $s \in S_n$ , że  $U = s_n^{-1}[\{s\}]$ . Zauważmy, że

$$r_n x = s_n f x = s, \text{ a więc } x \in r_n^{-1}[\{s\}].$$

Ustalmy  $y \in r_n^{-1}[\{s\}]$ . Wtedy  $s = r_n y = s_n f y$ , a więc  $f y \in s_n^{-1}[\{r\}] = U$ . Zatem  $r_n^{-1}[\{s\}]$  jest takim otoczeniem otwartym punktu  $x$ , że

$$f[r_n^{-1}[\{s\}]] \subset U.$$

Rozważmy teraz diagram:



gdzie  $B$  jest zbiorem przeliczalnym oraz rodzina morfizmów  $\langle t^n \rangle_{n < \omega}$  spełnia warunek  $t^n = t^{n+1}e_{n+1}^n$ . Istnieje dokładnie jeden morfizm  $g: A \rightarrow B$  taki, że

$$ge^k = t^k \text{ dla każdego } k < \omega.$$

Istotnie, ustalmy  $x \in A = \bigcup_{n < \omega} A_n$ . Wówczas istnieje  $m < \omega$  takie, że  $x \in A_m$ , a wtedy wystarczy przyjąć  $gx = t^m x$ .  $\square$

## 8.4 Kilka uwag o kategorii $\mathbf{S}_{\leq}$

Przyjrzyjmy się dokładniej kategorii  $\mathbf{S}_{\leq}$ . Możemy powtórzyć argumenty przytoczone powyżej, kojarząc każdy ciąg  $\vec{X}$  z jego granicą stowarzyszoną

$$\langle X^\infty, (X_0)_\infty \rangle,$$

gdzie  $X^\infty$  jest przestrzenią zwartą zerowymiarową metryzowalną uporządkowaną liniowo (tzn. z dokładnością do homeomorfizmu porządkowego, podzbiorem zwartym prostej rzeczywistej) oraz  $(X_0)_\infty$  jest jej przeliczalnym podzbiorem. Jest jeszcze inna interpretacja. Mianowicie, każdy element  $(X_0)_\infty$  może być zastąpiony przez niezdegenerowany domknięty przedział prostej rzeczywistej, zatem otrzymujemy inną zwartą liniowo uporządkowaną przestrzeń  $(X^0)_\infty$  nadal zanurzalną w prostą rzeczywistą. Po tej modyfikacji, możemy zapomnieć o zbiorze  $(X_0)_\infty$ , ponieważ przez „sklejenie” z powrotem każdego przedziału do punktu może on być odtworzony z  $(X^0)_\infty$ . Formalnie, definiujemy następującą relację równoważności na  $(X^0)_\infty$ :

$$x \sim y \iff [x, y] \text{ jest spójny.}$$

Wówczas  $(X^0)_\infty / \sim$  jest porządkowo izomorficzna z  $X^\infty$  oraz  $(X_0)_\infty$  odpowiada wszystkim nietrywialnym klasom równoważności relacji  $\sim$ . Podsumowując, biorąc pod uwagę ciąg  $\vec{X}$  w kategorii  $\mathbf{S}_{\leq}$ , możemy przypisać do niego przestrzeń  $(X^0)_\infty$ , traktując ją jako zwarty podzbiór prostej i uważać ją za granicę ciągu  $\vec{X}$ . Ponownie,  $\mathbf{S}_{\leq}$  spełnia wszystkie aksjomaty kategorii Fraïsségo (jest istotnie przeliczalna, skierowana, ma własność amalgamacji), zatem ma ciąg Fraïsségo  $\vec{U}$ . Okazuje się, że przestrzeń  $(U^0)_\infty$  otrzymana z granicy stowarzyszonej z tym ciągiem, jest znana jako symetryczny Cantorval.

## 8.5 Porządki liniowe

Rozważmy kategorię  $\mathbf{LO}$  niepustych skończonych liniowo uporządkowanych zbiorów z rosnącymi (tzn. zachowującymi słaby porządek) odwzorowaniami.



W szczególności odwzorowania stałe są rosnące.

**Stwierdzenie 45.** *Kategoria  $\ddagger\mathbf{LO}$  ma semiwłaściwą amalgamację.*

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightleftharpoons[e(g)]{} & W \\
 \uparrow & \nearrow r(g) & \uparrow \\
 r_Y \downarrow & & \downarrow r_W \quad \downarrow \iota_W \\
 Z & \xrightleftharpoons[r_X]{} & X
 \end{array}$$

*Dowód.* Ustalmy zbiór liniowo uporządkowany  $Z = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ , taki, że  $z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1}$ . Załóżmy, że  $Z \subset X$ ,  $Z \subset Y$  oraz odwzorowania  $\iota_X: Z \rightarrow X$ ,  $\iota_Y: Z \rightarrow Y$ , są włożeniami i  $r_X: X \rightarrow Z$ ,  $r_Y: Y \rightarrow Z$ , są projekcjami. Określamy następujące odwzorowania:  $r_W: X \cup e(g)[Y] \rightarrow X$  wzorem

$$r_W t = \begin{cases} t, & \text{dla } t \in (z_i, z_{i+1}) \cap X, \\ z_i, & \text{dla } t = e(g)y, \text{ gdzie } y \in (r_Y)^{-1}[\{z_i\}], \end{cases}$$

- $e(g)[(r_Y)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_i, z_{i+1})]$  jest dowolnym zanurzeniem w  $(z_i, \inf_X(z_i, z_{i+1}))$ ,
- $e(g)[(r_Y)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_{i-1}, z_i)]$  jest dowolnym zanurzeniem w  $(\sup_X(z_{i-1}, z_{i+1}), z_i)$ ,
- $e(g)z_i = z_i$ ,

$$r(g)t = \begin{cases} \max(r_Y)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_i, z_{i+1}), & \text{dla } t \in (r_X)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_i, z_{i+1}), \\ z_i, & \text{dla } t = z_i, \\ \min(r_Y)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_{i-1}, z_i), & \text{dla } t \in (r_X)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_{i-1}, z_i). \end{cases}$$

Bezpośrednio z definicji odwzorowania  $e(g)$  otrzymujemy przemienność poniższego diagramu.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{e(g)} & W \\
 \uparrow & & \uparrow \iota_W \\
 Z & \hookrightarrow & X
 \end{array}$$

W celu pokazania, że także następny diagram komutuje

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{r(g)} & W \\ r_Y \downarrow & & \downarrow r_W \\ Z & \xleftarrow{r_X} & X \end{array}$$

ustalmy  $t \in X \cup e(g)[Y]$ . Rozważmy dwa przypadki. Jeśli  $t \in e(g)[Y]$ , tzn.  $t = e(g)y$  dla pewnego  $y \in Y = \bigcup_{0 \leq i < n} (r_Y)^{-1}[\{z_i\}]$  to

$$r_X r_W t = r_X r_W e(g)y = r_X z_i = z_i,$$

gdy  $y \in (r_Y)^{-1}[\{z_i\}]$ . Natomiast

$$r_Y r(g)t = r_Y r(g)e(g)y = r_Y y = z_i.$$

W drugim przypadku, gdy  $t \in X$  otrzymujemy

$$r_W t = r_W \iota_W t = \text{id}_W t = t$$

czyli  $r_X r_W t = r_X t$ . Natomiast

$$r(g)t = \max(r_Y)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_i, z_{i+1}),$$

gdy  $t \in (r_X)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_i, z_{i+1})$  oraz

$$r(g)t = \min(r_Y)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_{i-1}, z_i),$$

dla  $t \in (r_X)^{-1}[\{z_i\}] \cap (z_{i-1}, z_i)$ . W obu przypadkach

$$r_X t = z_i \text{ oraz } r_Y r(g)t = z_i.$$

W celu pokazania, że także następny diagram komutuje ustalmy  $y \in (r_Y)^{-1}[\{z_i\}]$ . Wtedy  $r_W e(g)y = z_i = \iota_X r_Y y$ .

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{e(g)} & W \\ r_Y \downarrow & & \downarrow r_W \\ Z & \xrightarrow{\iota_X} & X \end{array}$$

Nie jesteśmy natomiast w stanie pokazać, że komutuje czwarty diagram.

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xleftarrow{r(g)} & W \\
\uparrow & & \uparrow \iota_W \\
Z & \xleftarrow{r_X} & X
\end{array}$$

□

**Przykład 46.** Bardzo prosty przykład pokazuje, że kategoria  $\mathbb{LO}$  niepustych skończonych liniowo uporządkowanych zbiorów z  $ZP$ -parą odwzorowań nie dopuszcza właściwej amalgamacji, jedynie semiwłaściwą amalgamację.

$$\begin{array}{ccc}
z < y & \xleftrightarrow[e(g)]{r(g)} & a < b < c \\
\uparrow r_Y & & \uparrow r_W \\
\downarrow \iota_Y & & \downarrow \iota_W \\
z & \xleftrightarrow[r_X]{\iota_X} & z < x
\end{array}$$

Niech  $\iota_X z = z = \iota_Y$ . Wówczas  $\iota_W z = a$  oraz bez straty ogólności możemy założyć, że  $\iota_W x = b$ . Ponadto  $e(g)z = a$ ,  $e(g)y = c$  oraz  $r(g)b = z$ . Wówczas poniższy diagram nie komutuje:

$$\begin{array}{ccc}
z < y & \xrightarrow{e(g)} & a < b < c \\
\downarrow r_Y & & \downarrow r_W \\
z & \xrightarrow{\iota_X} & z < x
\end{array}$$

Istotnie,  $r_W e(g)y = x$  natomiast  $\iota_X r_Y y = z$ . Łatwo sprawdzić, że pozostałe trzy diagramy komutują.

## 8.6 Uniwersalna jednorodna miara probabilistyczna na zbiorze Cantora

Wyniki prezentowane w tej części pozostawiamy bez dowodów, gdyż są one nadal w fazie przygotowywania wspólnej z promotorami publikacji.

Okazuje się, że można udowodnić istnienie na zbiorze Cantora dokładnie jednej miary probabilistycznej, która jest silnie dodatnia, przyjmuje wartości wymierne na zbiorach domknięto-otwartych i spełnia pewien warunek jednorodności. Jako przykład zastosowania tego wyniku przedstawimy związany z miarą wariant twierdzenia Knastera–Reichbacha.

Rozważane obiekty będą teraz przestrzeniami proskończonymi z miarami probabilistycznymi regularnymi. Mówimy, że przestrzeń jest *proskończona*, gdy jest (homeomorficzna z) granicą odwrotną ciągu przestrzeni skończonych niepustych. Przypominamy kilka faktów:

- Przestrzeń niepusta jest proskończona wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią zwartą Hausdorffa i ma bazę przeliczalną złożoną z podzbiorów domknięto-otwartych.
- Każda miara regularna na przestrzeni proskończonej jest wyznaczona przez swoje wartości na podzbiorach domknięto-otwartych.
- Każda funkcja skończenie addytywna określona na algebrze zbiorów domknięto-otwartych ma dokładnie jedno rozszerzenie do miary borelowskiej regularnej.

Od tego momentu zakładamy, że wszystkie rozważane przez nas miary na przestrzeniach topologicznych są regularne.

Mówimy, że miara  $\mu$  na przestrzeni proskończonej  $K$  jest *wymierna* (odpowiednio *ściśle dodatnia*), gdy dla każdego podzbioru domknięto-otwartego niepustego  $U \subset K$ , wartość  $\mu U$  jest liczbą wymierną (odpowiednio  $\mu U > 0$ ). Jeśli  $(X, \mu)$  oraz  $(Y, \nu)$  są przestrzeniami z miarą, to mówimy, że funkcja  $f: X \rightarrow Y$  *zachowuje miarę* jeśli  $\mu f^{-1}[B] = \nu B$  dla każdego zbioru mierzalnego  $B \subset Y$ . Będziemy używać tego pojęcia tylko dla ciągłych surjekcji  $f$  oraz miar borelowskich regularnych  $\mu$  oraz  $\nu$ .

**Twierdzenie 47.** *Istnieje dokładnie jedna, z dokładnością do homeomorfizmu zachowującego miarę, miara probabilistyczna  $\mathbf{P}$  na zbiorze Cantora  $2^\omega$ , która jest wymierna, ściśle dodatnia i spełnia następujący warunek:*

- ( $\boxminus$ ) *Dla każdego zbioru niepustego  $U \in \text{CO}(2^\omega)$  oraz dodatnich liczb wymiernych  $r_0, r_1$ , jeśli  $\mathbf{P} U = r_0 + r_1$ , to istnieje taki podział  $U_0, U_1 \in \text{CO}(2^\omega)$  zbioru  $U$ , że  $\mathbf{P} U_i = r_i$  dla  $i = 0, 1$ .*

**Twierdzenie 48.** *Założmy, że  $\mathbf{P}$  jest miarą, o której istnieniu mówi poprzednie twierdzenie. Wówczas dla każdego  $n > 0$  oraz liczb wymiernych*

$r_0, \dots, r_{n-1} > 0$ , jeśli  $r_0 + \dots + r_{n-1} = 1$ , to istnieje taki podział  $U_0, \dots, U_{n-1} \in \text{CO}(2^\omega)$  zbioru Cantora  $2^\omega$ , że  $\mathbf{P} U_i = r_i$  dla  $i < n$ . Ponadto, jeśli  $K \subset 2^\omega$  jest podzbiorem domkniętym miary zero, a  $V_0, \dots, V_{n-1} \in \text{CO}(2^\omega)$  jest podziałem spełniającym warunki  $\mathbf{P} V_i = r_i$  oraz  $U_i \cap K = V_i \cap K$  dla  $i < n$ , to istnieje taki homeomorfizm  $h: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  zachowujący miarę, że  $h \upharpoonright K = \text{id}_K$  oraz  $h[U_i] = V_i$  dla  $i < n$ .

**Twierdzenie 49.** Załóżmy, że  $K$  jest przestrzenią proskończoną z miarą probabilistyczną wymierną, ściśle dodatnią. Wówczas istnieje takie zanurzenie topologiczne  $e: K \rightarrow 2^\omega$  oraz surjekcja ciągła i zachowująca miarę  $r: 2^\omega \rightarrow K$ , że  $\mathbf{P} e[K] = 0$  oraz  $re = \text{id}_K$ .

**Wniosek 50.** Każdy homeomorfizm pomiędzy podzbiarami domkniętymi miary zero zbioru Cantora ma przedłużenie do homeomorfizmu zbioru Cantora zachowującego miarę.

Ostatni rezultat jest wariantem — związanym z teorią miary — twierdzenia Knastera–Reichbacha (twierdzenie 12). Twierdzenie 49 jest wzmocnieniem znanego faktu mówiącego, że każda przestrzeń proskończona jest homeomorficzna z retraktem zbioru Cantora.

## Literatura

- [1] Z. Adamowicz oraz P. Zbierski, *Logika matematyczna*, Warszawa (1991).
- [2] G. Bachman oraz A. Sultan, *On regular extensions of measures*, Pacific J. Math. 86 (1980), 389–395.
- [3] T. Banakh, O. Chervak, T. Martynyuk, M. Pylypovych, A. Ravsky oraz M. Simkiv, *Kuratowski monoids of  $n$ -topological spaces*, arXiv:1508.07703.
- [4] D. Bartošová oraz A. Kwiatkowska, *Lelek fan from a projective Fraïssé limit*, Fund. Math. 231 (2015), no. 1, 57–79.
- [5] J. Bell, *Toposes and Local Set Theories. An Introduction*, Dover Publications, INC. (1988).
- [6] W. Bielas, Sz. Plewik oraz M. Walczyńska, *On the center of distances*, European Journal of Mathematics, DOI: 10.1007/s40879-017-0199-4 lub arXiv: 1605.03608v2.
- [7] S. Eilenberg oraz N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1952).
- [8] S. Eilenberg oraz S. Mac Lane, *General theory of natural equivalences*, Translations of the American Mathematical Society 58, (1945), 231–294.
- [9] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN Warszawa (1975).
- [10] R. Engelking, *Teoria wymiaru*, PWN Warszawa (1977).
- [11] B. J. Gardner oraz M. Jackson, *The Kuratowski closure-complement theorem*, New Zealand J. Math. 38 (2008), 9–44.
- [12] J. de Groot, *Non-archimedean metrics in topology*, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 948–953.
- [13] A. Gutek, *On homeomorphisms on the Cantor set that have fixed points*, Topology Proc. 9 (1984), no. 2, 307–311.
- [14] J. A. Guthrie oraz J. E. Nymann, *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Colloq. Math. 55 (1988), no. 2, 323–327.
- [15] W. T. Ingram, *Inverse limits*, Aportaciones Matemáticas: Investigación [Mathematical Contributions: Research], 15. Sociedad Matemática Mexicana, México, (2000) 80 pp.

- [16] T. Irwin oraz S. Solecki, *Projective Fraïssé limits and the pseudo-arc*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 7, 3077–3096.
- [17] A. S. Kechris, V. G. Pestov oraz S. Todorcevic, *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*, Geom. Funct. Anal. 15 (2005), no. 1, 106–189.
- [18] J. Kleszcz, *Extensions to maps on the Cantor set with dense orbits*, Topology Appl. 37 (1990), no. 3, 201–211.
- [19] B. Knaster oraz M. Reichaw-Reichbach, *Notion d’homogénéité et prolongements des homéomorphismes*, Fund. Math. 40, (1953), 180–193.
- [20] M. Krasner, *Nombres semi-réels et espaces ultramétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 219, (1944), 433–435.
- [21] W. Kubiś, *Fraïssé sequences: category-theoretic approach to universal homogeneous structures*, Ann. Pure Appl. Logic 165 (2014), 1755–1811.
- [22] W. Kubiś, *Injective objects and retracts of Fraïssé limits*, Forum Math. 27 (2015), 807–842.
- [23] W. Kubiś, *Banach–Mazur game played in partially ordered sets*. Algebra, logic and number theory, Banach Center Publ., 108, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, (2016), 151–160.
- [24] W. Kubiś oraz A. Kwiatkowska *The Lelek fan and the Poulsen simplex as Fraïssé limits*, RACSAM. (2017).
- [25] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, (1980).
- [26] S. Lefschetz, *On compact spaces*, Ann. of Math. (2) 32 (1931), no. 3, 521–538.
- [27] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, (1998).
- [28] P. Mendes oraz F. Oliveira, *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets*, Nonlinearity 7 (1994), 329–343.
- [29] J. Mioduszewski, *A functional conception of snake-like continua*, Fund. Math. 51 (1962/1963), 179–189.
- [30] J. Mioduszewski, *Wykład z topologii Część I, Wstęp z teorii kategorii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego Katowice (1971).

- [31] K. Morita, *Normal Families and Dimension Theory for Metric Spaces*, Math. Ann., 128 (1954), 350–362.
- [32] Z. Nitecki, *Cantorvals and subsum sets of null sequences*, Amer. Math. Monthly 122 (2015), no. 9, 862–870.
- [33] J. E. Nymann oraz R. A. Sáenz, *On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, Colloq. Math. 83 (2000), no. 1, 1–4.
- [34] C. Pech oraz M. Pech, *Universal homogeneous constraint structures and the hom-equivalence classes of weakly oligomorphic structures*, preprint, arXiv:1203.6086.
- [35] Sz. Plewik oraz M. Walczyńska, *The Monoid Consisting of Kuratowski Operations*, Journal of Mathematics (2013), 1–9.
- [36] Sz. Plewik oraz M. Walczyńska, *On metric  $\sigma$ -discrete spaces*, Algebra, logic and number theory, 239–253, Banach Center Publ., 108, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, (2016), 239–253.
- [37] J. Pollard, *On extending homeomorphisms on zero-dimensional spaces*, Fund. Math. LXVII (1970), 39–48.
- [38] D. Ravdin, *On extensions of homeomorphisms to homeomorphisms*, Pacific J. Math. 37 (1971), 481–495.
- [39] G. M. Reed, A. W. Roscoe oraz R. F. Wachter, *Topology and category theory in computer science*, Papers from the Topology Symposium held in Oxford, June 27–30, 1989. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1991).
- [40] P. Roy, *Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 609–613.
- [41] Z. Semadeni oraz A. Wiweger, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, PWN Warszawa (1972).
- [42] A. H. Stone, MR0061817 (15,889b) omówienie artykułu [19].